Opgave 8

In deze opgave bekijken we het gedrag van een oscillator als er zowel demping als een externe kracht aanwezig is. We nemen aan dat de uitwijkingen niet te groot zijn.

1. Een bewegingsvergelijking voor een realistische oscillator met demping en forcering is

$$\ddot{x} \;+\; \gamma\dot{x} \;+\; \omega^2\, x \;\;=\;\; \delta e^{\mathrm{i}\,\Omega\, t} \;\;, \quad \text{met } \omega, \Omega, \gamma, \delta \in \mathbb{R}_{>0}. \tag{1}$$

   Vind een algemene oplossing, kies een particuliere oplossing in de vorm $A\, e^{\mathrm{i}\,\Omega\, t}$, waarbij de amplitude A complex is. Maak een grafiek van de functie $|A(\Omega)|^2$, met $\omega = \delta = 1$ en $\gamma = \{0, 2\}$. Voor welke waarde van Ω is de amplitude maximaal? Vindt er een resonatie plaats in het geval van sterke demping ($\gamma \gg \omega$)? Wanneer treedt de resonantie op als er geen wrijving is? Wat is de bijbehorende amplitude? Wat gaat er mis in dit geval?

2. Voor een ideale slinger met kleine uitwijkingen hebben we

$$\ddot{x} \;+\; \omega^2\, x \;\;=\;\; 0$$

   en de constante van beweging is $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$. Dit is gelijk aan de som van de potentiële en kinetische energie.

   Bereken $\frac{dE}{dt}$ voor de oscillator (1) en geef alle gevallen waarvoor E constant is. Interpreteer de condities voor de parameters en de variabelen in termen van beweging.

3. Neem $\omega = 1$ en $\gamma = 0.5$ en schets het reële deel van de oplossing voor $(\delta, \Omega) = (0.1, 1)$ en $(\delta, \Omega) = (1, .25)$ en $(\delta, \Omega) = (1, 1)$. Doe dit in één plaatje en let op asymptoten.