

Extra opgave

Laat zien dat de volgende afbeeldingen contracties zijn. Geef (indien mogelijk) de vaste punten van de afbeeldingen. Laat in b) zien (eventueel met een plaatje) dat er meer dan één vast punt kan bestaan, als de parameters α, β, γ niet aan de gegeven voorwaarden voldoen.

- a) Zij $x \mapsto x^2$, $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ voor $\varepsilon > 0$ voldoende klein. Voor welke ε geldt dat de afbeelding een contractie is.
- b) $x \mapsto \alpha + \beta \sin \gamma x$, $x \in \mathbb{R}$, $|\beta\gamma| < 1$.
- c) $x \mapsto \alpha f(x)$, $x \geq 0$, waar $f(x)$ is monotoon stijgend en begrensd op $[0, \infty)$, $f(x) = x h(x)$ en $h(x) \in C^1$ is een positieve, strikt dalende functie op $[0, \infty)$ met $h(0) = 1$ en $0 < \alpha < 1$;
- d) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (met de Euclidische norm op \mathbb{R}^2) en F is gegeven door

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y \\ \beta x \end{pmatrix}$$

met $|\alpha|, |\beta| < 1$.