Hertentamen differentiaalvergelijkingen 22 augustus 2011

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Sebastiaan Janssens, Wilfred de Graaf of Thomas Wasserman).
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel in het vervolg gebruiken.
- De 4 opgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. We definiëren door middel van de Hamiltonfunctie

$$H(q,p) \;=\; \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2) \;+\; \frac{\omega}{2}(p_2^2 + q_2^2)$$

met $\omega \neq 0$ een Hamiltoniaans systeem op $\mathbb{R}^4$.

(*i*) Zij $\omega = \dfrac{k}{\ell} \in \mathbb{Q}$. Bepaal het evenwichtspunt en laat zien dat alle andere banen periodiek zijn.

(*ii*) Zij $\omega \notin \mathbb{Q}$. Geef het evenwichtspunt en de periodieke banen aan.

2. We maken van het randwaardeprobleem

$$Ly \;:=\; -y'' + y \;=\; 0\ , \qquad y(0) \;=\; y'(0)\ , \quad y(\pi) \;=\; y'(\pi)$$

een eigenwaardeprobleem $Ly = \lambda y$ (met dezelfde randwaarden).

(*i*) Bepaal de eigenwaarden en eigenfuncties.

(*ii*) Laat zien dat eigenfuncties behorende bij verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar staan.

3. We bestuderen lineaire $n$de orde differentiaaloperatoren L met constante coëfficiënten.

   (i) Beschouw eerst het speciale geval $Ly = y^{(n)}$. Herschrijf de homogene vergelijking $Ly = 0$ in de vorm van het bijbehorende 1ste orde systeem
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z = Az$$
   met $z_1 = y$ en bereken voor de matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ de algebraïsche en de meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde 0.

   (ii) Zij nu L een willekeurige lineaire $n$de orde differentiaaloperator met constante coëfficiënten en λ een eigenwaarde van het bijbehorende 1ste orde systeem met algebraïsche multipliciteit $m \geq 2$. Laat zien dat λ meetkundige multipliciteit 1 heeft. *Hint:* gebruik de (al bekende) oplossingen $t^\ell \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\ell = 0, \ldots, m-1$.

4. We beschouwen op $\mathbb{R}^2$ het niet-lineaire systeem
   $$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 1 + y_2 - y_1^2 \\ \dot{y}_2 &= -y_2 \end{aligned}$$
   van differentiaalvergelijkingen.

   (i) Geef de evenwichtspunten en bepaal hun stabiliteit. Bereken naast de eigenwaarden ook de eigenvectoren.

   (ii) Bewijs dat er geen periodieke banen zijn.

   (iii) Schets het faseplaatje. *Hint:* maak gebruik van de in (i) berekende eigenvectoren.