

Extra Opgaven

1. Zij $Ly = 0$, $y(a) = y(b) = 0$ een homogeen randwaardeprobleem dat alleen de triviale oplossing $y = 0$ heeft. Toon aan dat y dan en slechts dan een eigenfunctie bij de eigenwaarde λ is als

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

met G de functie van Green.

2. Indien L zelfgeadjungeerd is met eigenfuncties w_k concludeer

$$G(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k(x)w_k(\xi)}{\lambda_k}$$

voor de functie van Green.

3. Voor de differentiaaloperator $Ly = (py)'+ry$ bereken

$$\langle Lf | g \rangle - \langle f | Lg \rangle = - \left[p(x) w(x) \right]_a^b$$

waar $w(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ de Wronski-determinant van $f, g \in C^2[a, b]$ is. Leidt hieruit af dat L voor alle homogene randvoorwaarden van de vorm $a_1y(a) + a_2y'(a) = 0$, $b_3y(b) + b_4y'(b) = 0$ met $a_1^2 + a_2^2 \neq 0 \neq b_3^2 + b_4^2$ zelfgeadjungeerd is.