Tentamen differentiaalvergelijkingen 25 juni 2012

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je werkcollegeleider: Wilfred de Graaf (groep 1), Jaap Eldering (groep 2) of Roy Wang (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- *SUCCES!*

1. **[21]** Geef de algemene oplossing van $\dddot{y} + \ddot{y} - \dot{y} - y = \cos t$.

2. **[28]** Beschouw de vergelijking $\ddot{q} = \lambda q - q^2$.

   (i) Bepaal de potentiële energie U van dit klassiek mechanisch systeem.

   (ii) Schets $U = U(q)$ voor minstens drie welgekozen waarden van λ (geef aan waarom deze waarden zijn gekozen) en construeer hieruit de faseplaatjes in het (q, v)–vlak.

   (iii) Wat verandert als λ de waarde 0 passeert?

3. **[28]** Beschouw op $[0, \pi]$ het eigenwaardeprobleem

$$y'' + \frac{1}{4}y = \lambda y \tag{1}$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0 \tag{2}$$

(let op: dit zijn noch Neumann noch Dirichlet randwaardecondities).

(i) Bereken de algemene oplossing van (1).

(ii) Bepaal de eigenwaarden, d.w.z. de λ waarvoor een niet-triviale oplossing van (1) aan (2) voldoet.

4. **[28]** Beschouw de lineaire 2de orde differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} - t^2\dot{y} - 2ty = 0 \tag{3}$$

met variabele coëfficiënten.

(i) Schrijf $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ voor een oplossing van (3) en geef een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n.

(ii) Bereken de machtreeks voor de oplossing $y^1(t)$ met beginwaarden $y^1(0) = 1$ en $\dot{y}^1(0) = 0$. Geef een expliciete uitdrukking voor de coëfficienten (los de recurrente betrekking op).

(iii) Geef de oplossing $y^2(t)$ met beginwaarden $y^2(0) = 0$ en $\dot{y}^2(0) = 1$.

(iv) Bewijs dat er geen oplossingen van de vorm $y(t) = t^2\gamma(t^3)$ zijn met γ op heel $\mathbb{R}$ differentieerbaar (behalve de functies $y = \gamma = 0$).