Differentiaalvergelijkingen: klassieke mechanica

De beweging van een systeem met één vrijheidsgraad wordt in de klassieke mechanica gegeven door de 2e-orde vergelijking

$$\ddot{q} \;=\; -\frac{dV(q)}{dq} \;, \tag{1}$$

waarbij q een scalaire positie coördinaat is en $V = V(q)$ de potentiële energie genoemd wordt.

1. Schrijf de differentiaalvergelijking (1) om naar

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{q} & = & p \\ \dot{p} & = & -\frac{dV(q)}{dq} \end{array} \right. \;. \tag{2}$$

2. Geef een constante van beweging voor de differentiaalvergelijking (1) en noem deze in het vervolg $E(q,p)$. *Hint:* vermenigvuldig (1) met $\dot{q}$ en integreer naar de tijd.

We gaan nu de relatie tussen de niveauverzamelingen van E en de oplossingen van het systeem (2) onderzoeken. Merk allereerst op dat als $(q(t), p(t))$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking (2) dan is $E(q(t), p(t))$ constant. M.a.w., de baankromme $(q(t), p(t))$ ligt op een niveauverzameling van de functie E. Omgekeerd geldt als $(q(t), p(t))$ op een niveauverzameling van E ligt en $p \neq 0$ dan is $(q(t), p(t))$ een oplossing van het stelsel (2). Dit volgt uit het naar t differentieren van $E(q(t), p(t))$.

3. Ga dit na.

Als $p = 0$ voor alle t dan is $\dot{p} = 0$ voor alle t. Dit is een rustpunt voor het stelsel (2) en dus ook een oplossing. **Conclusie:** niveauverzamelingen van E worden samengesteld uit baankrommen van het stelsel (2). Let op, een niveauverzameling kan uit meerdere oplossingen bestaan!

4. Neem $E_1(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$. Teken de niveauverzamelingen van E_1 voor de niveau's $E_1 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 4$.

5. Merk op dat we de banen ook impliciet kunnen schrijven als $p = \pm\sqrt{2(E_1 - V(q))}$, als $V(q) \leq E_1$. Karakteriseer m.b.v. dit gegeven alle oplossingen van het systeem van de vorige opgave.

6. Neem $E_2(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + 4(q^4 + q^3 - q^2)$. Teken de niveauverzamelingen van E_2 voor $E_2 = -3, -2, -1, 0, 2, 1$. Vind de kritieke waarden tussen de verschillende niveauverzamelingen. Als het goed is, heb je een zadel. De twee banen die voor $t \to \pm\infty$ naar het zadelpunt convergeren noemen we homocliene oplossingen.

We zien dus dat het algemene recept om het faseplaatje voor een potentiaalsysteem te tekenen als volgt luidt.

a. Vindt de kritieke punten en de bijbehorende waarden van het potentiaal $V(q)$ en teken de grafiek van $V(q)$.

b. Teken in het (q,p)–vlak periodieke banen rond lokale minima van V en zadels bij lokale maxima. Merk op dat de stabiele en instabiele krommes dan en slechts dan transversaal zijn als $\frac{d^2V}{dq^2} \neq 0$.

c. Teken de kritieke niveauverzamelingen die door de zadels gaan.

d. Zet pijltjes op de banen; naar rechts voor $p > 0$ en naar links voor $p < 0$.

e. Ga na dat de q–as verticaal door banen wordt gepasseerd buiten evenwichten.

Dit recept wordt nu toegepast.

7. Neem $E_3(q,p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos(q)$. Teken het faseplaatje behorende bij dit potentiaal volgens bovenstaand recept.

8. Geef een gedetailleerd faseplaatje in het half-vlak $\{(q,p) : q > 0\}$ voor *Kepler's probleem*

$$V(q) \;=\; -\frac{1}{q} \,+\, \frac{C}{q^2}$$

met een reële constante $C > 0$. Welke banen beschijven de planeten?

9. Beschouw het systeem

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} &=& -x + 2y + x^2 \qquad\qquad \equiv \; P(x,y) \\ \dot{y} &=& 2x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy \;\equiv\; Q(x,y) \end{array}\right. . \tag{3}$$

a) Bewijs dat een oplossing van (3) met

$$x(0) \;=\; 1 \;, \quad y(0) \;=\; 0$$

correspondeert met een homocliene baan naar het punt $(0,0)$, d.w.z.,

$$\lim_{t\to\pm\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Hint: beschouw het 'Cartesische blad':

$$H(x,y) \;\equiv\; x^2(1-x) \;-\; y^2 \;=\; 0 \;,$$

en bewijs dat dit bestaat uit banen van het systeem (3). Laat hiertoe zien dat het vectorveld van het rechterlid van (3) loodrecht staat op de normaalvector van de kromme $H(x,y) = 0$.

b) Vind alle rustpunten van het systeem en onderzoek hun stabiliteit door de eigenwaarden van de Jacobi-matrix geëvalueerd op elk van de rustpunten te analyseren.

c) Schets het faseplaatje van (3) onder de aanname dat er geen periodieke oplossingen zijn.

d) Bewijs dat er geen periodieke oplossingen zijn.

10. Beschouw de vergelijking $\ddot{q} = \lambda - q^2$.

a) Bepaal de potentiële energie U van dit klassiek mechanisch systeem.

b) Voor $\lambda = 0$ en voor minstens twee welgekozen (geef aan waarom deze waarden zijn gekozen) positieve en twee welgekozen negatieve waarden van λ teken het faseplaatje in het (q,v)–vlak op drie verschillende manieren.

(i) Schets $U = U(q)$ en construeer hieruit het faseplaatje.

(ii) Gebruik een programma zoals `ImplicitPlot` in `Mathematica` om de niveaukrommen van de totale energie

$$E(q,v) \;=\; \frac{v^2}{2} \,+\, U(q)$$

te tekenen.

(iii) Gebruik een programma zoals `dfield` om het systeem

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= \lambda - q^2 \end{aligned}$$

van twee 1e orde vergelijkingen numeriek op te lossen.

c) Wat verandert bij doorgang van λ door 0 ?