Hertentamen differentiaalvergelijkingen 19 augustus 2013

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je werkcollegeleider: Boris Osorno Torres (groep 1), Joey van der Leer Duran (groep 2) of Siamak Taati (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel in het vervolg gebruiken.
- *SUCCES!*

1. **[10]** Bewijs dat de maximale oplossing $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ van het beginwaardeprobleem

$$\dot{y} \;=\; \frac{y}{t} + t^3 \;, \quad y(1) \;=\; \frac{1}{3}$$

voldoet aan $y(t) > 0$ voor alle $t \in I$.

2. **[35]** Beschouw op $\mathbb{R}^2$ het door $V(x,y) = x^3y + xy^3 - 4xy$ gegeven gradiënt-vectorveld

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} \;.$$

(*i*) Geef alle evenwichtspunten (x_0, y_0).

(*ii*) Bereken de linearizeringen in de evenwichtspunten en de eigenwaarden.

(*iii*) Bepaal de types van de evenwichtspunten, in het bijzonder hun stabiliteit.

(*iv*) Ga na dat $(0,0) + E_\lambda$ voor de twee eigenruimten E_λ onder de stroming invariant is. *Opmerking:* in feite zijn zelfs voor alle zadelpunten (x_0, y_0) en hun eigenruimten E_λ de verzamelingen $(x_0, y_0) + E_\lambda$ onder de stroming invariant, en daar mag je in het vervolg ook gebruik van maken.

(*v*) Schets het faseplaatje.

3. **[35]** Beschouw op $\mathbb{R}^4$ de Hamiltonfunctie

$$H(q,p) \;=\; p_1^2 + p_2^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_1p_2 - q_2p_1 \;. \tag{1}$$

Doel van deze opgave is om de stroming van het door (1) gedefinieerde Hamiltoniaanse vectorveld te berekenen.

(*i*) Geef het door (1) gedefinieerde Hamiltoniaanse systeem.

(*ii*) Verifieer dat de lineaire deelruimten $\{q = p\}$ en $\{q = -p\}$ onder het Hamiltoniaanse systeem invariant zijn.

(*iii*) Bepaal de eigenwaarden van de lineaire deelsystemen op $\{q = p\}$ en $\{q = -p\}$.

(*iv*) Hoe zien de stromingen van de deelsystemen op $\{q = p\}$ en $\{q = -p\}$ eruit?

(*v*) Bereken de stroming van het door (1) gedefinieerde Hamiltoniaanse systeem. Een antwoord in de vorm $\varphi_t = SR(t)S^-1$ met expliciet aangegeven $R(t)$ en S (of S^{-1}, naar keuze) volstaat, een inverse hoef je dus niet te berekenen.

4. **[20]** Zij

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,y) \\ \dot{y} & = & g(x,y) \end{array} \right. \tag{2}$$

een continu differentieerbaar vectorveld op $\mathbb{R}^2$ met stroming φ_t.

(*i*) Zij $A \subseteq \mathbb{R}^2$ een open gebied waarvan de rand een periodieke baan vormt. Laat zien dat A en de afsluiting $\overline{A}$ invariant zijn onder φ_t, d.w.z. voor alle tijden $t \in \mathbb{R}$ geldt dat $\varphi_t(A) = A$ en $\varphi_t(\overline{A}) = \overline{A}$.

(*ii*) Toon aan dat

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; 0$$

voor de integraal van de divergentie van het vectorveld over het gebied A uit (*i*).

(*iii*) Bewijs het criterium van Bendixon: een convex gebied waarin de divergentie van (2) geen nulpunten heeft kan geen periodieke banen bevatten.