Tentamen differentiaalvergelijkingen 24 juni 2013

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook de naam van je werkcollegeleider: Boris Osorno Torres (groep 1), Joey van der Leer Duran (groep 2) of Siamak Taati (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- *SUCCES!*

1. **[35]** Beschouw op $\mathbb{R}^2$ het door $V(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2)$ gegeven gradiënt-vectorveld

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} .$$

   (*i*) Geef alle evenwichtspunten (x_0, y_0).

   (*ii*) Bereken de linearizeringen in de evenwichtspunten en de eigenwaarden.

   (*iii*) Bepaal de types van de evenwichtspunten, in het bijzonder hun stabiliteit.

   (*iv*) Ga na dat $(x_0, y_0) + E_\lambda$ voor alle zadelpunten (x_0, y_0) en hun eigenruimten E_λ onder de stroming invariant is.

   (*v*) Schets het faseplaatje.

2. **[35]** Beschouw op $\mathbb{R}^2$ het door $H(q,p) = q^4 - 2q^2 + 2p^2 - p^4$ gegeven Hamiltoniaanse vectorveld

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} .$$

(i) Geef alle evenwichtspunten (q_0, p_0).

(ii) Bereken de linearizeringen in de evenwichtspunten en de eigenwaarden.

(iii) Bepaal de types van de evenwichtspunten, in het bijzonder hun stabiliteit.

(iv) Ga na dat $(0,0)+E_\lambda$ voor de twee eigenruimten E_λ onder de stroming invariant is.

(v) Schets het faseplaatje.

3. **[15]** Beschouw het vectorveld

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{y}_1 & = & -(y_1^2 + y_2^2) y_2 \\ \dot{y}_2 & = & (y_1^2 + y_2^2) y_1 \end{array} \right. \tag{1}$$

op $\mathbb{R}^2$.

(i) Substitueer poolcoördinaten $y_1 = \rho \cos \vartheta$, $y_2 = \rho \sin \vartheta$ en bereken het vectorveld in deze coördinaten.

(ii) Los het zo verkregen systeem van differentiaalvergelijkingen op.

(iii) Bepaal de stroming φ_t van (1).

4. **[15]** Beschouw op $[0,1]$ de inhomogene lineaire 2de orde differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} \; - \; \frac{\dot{y}}{1+t} \; + \; 4(1+t)^2 y \;\; = \;\; \sin\big((1+t)^2\big) \tag{2}$$

met variabele coëfficiënten.

(i) Verifieer dat $\sin\left((1+t)^2\right)$ de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking oplost.

(ii) Bepaal een fundamentele matrix voor het bijbehorende (homogene) lineaire systeem van 1ste orde differentiaalvergelijkingen.

(iii) Geef de algemene oplossing van (2).