

Differentiaalvergelijkingen 2009

Inleverdatum voor opgave 10 is 27 april

De beweging van een systeem met één vrijheidsgraad wordt in de klassieke mechanica gegeven door de 2e-orde vergelijking

$$\ddot{q} = -\frac{dV(q)}{dq}, \quad (1)$$

waarbij q een scalaire positie coördinaat is en $V = V(q)$ de potentiële energie genoemd wordt.

1. Schrijf de differentiaalvergelijking (1) om naar

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\frac{dV(q)}{dq} \end{cases}. \quad (2)$$

2. Geef een constante van beweging voor de differentiaalvergelijking (1) en noem deze in het vervolg $E(q, p)$. *Hint:* vermenigvuldig (1) met \dot{q} en integreer naar de tijd.

We gaan nu de relatie tussen de niveauverzamelingen van E en de oplossingen van het systeem (2) onderzoeken. Merk allereerst op dat als $(q(t), p(t))$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking (2) dan is $E(q(t), p(t))$ constant. M.a.w., de baan $(q(t), p(t))$ ligt op een niveauverzameling van de functie E . Omgekeerd geldt als $(q(t), p(t))$ op een niveauverzameling van E ligt en $p \neq 0$ dan is $(q(t), p(t))$ een oplossing van het stelsel (2). Dit volgt uit het naar t differentieren van $E(q(t), p(t))$.

3. Ga dit na.

Als $p = 0$ voor alle t dan is $\dot{p} = 0$ voor alle t . Dit is een rustpunt voor het stelsel (2) en dus ook een oplossing. **Conclusie:** niveauverzamelingen van E worden samengesteld uit baankrommen van het stelsel (2). Let op, een niveauverzameling kan uit meerdere oplossingen bestaan!

4. Neem $E_1(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$. Teken de niveauverzamelingen van E_1 voor de niveau's $E_1 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 4$.
5. Merk op dat we de banen ook impliciet kunnen schrijven als $p = \pm\sqrt{2(E_1 - V(q))}$, als $V(q) \leq E_1$. Karakteriseer m.b.v. dit gegeven alle oplossingen van het systeem van de vorige opgave.
6. Neem $E_2(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + 4(q^4 + q^3 - q^2)$. Teken de niveauverzamelingen van E_2 voor $E_2 = -3, -2, -1, 0, 2, 1$. Vind de kritieke waarden tussen de verschillende niveauverzamelingen. Als het goed is, heb je een zadel. De twee banen die voor $t \rightarrow \pm\infty$ naar het zadelpunt convergeren noemen we homocliene oplossingen.

We zien dus dat het algemene recept om het faseplaatje voor een potentiaalsysteem te tekenen als volgt luidt.

- a. Vindt de kritieke punten en de bijbehorende waarden van het potentiaal $V(q)$ en teken de grafiek van $V(q)$.
- b. Teken in het (q, p) -vlak periodieke banen rond lokale minima van V en zadels bij lokale maxima. Merk op dat de stabiele en instabiele krommes dan en slechts dan transversaal zijn als $\frac{d^2V}{dq^2} \neq 0$.
- c. Teken de kritieke niveauverzamelingen die door de zadels gaan.
- d. Zet pijltjes op de banen; naar rechts voor $p > 0$ en naar links voor $p < 0$.

- e. Ga na dat de q -as verticaal door banen wordt gepasseerd buiten evenwichten.

Dit recept wordt nu toegepast.

7. Neem $E_3(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos(q)$. Teken het faseplaatje behorende bij dit potentiaal volgens bovenstaand recept.
8. Geef een gedetailleerd faseplaatje in het half-vlak $\{(q, p) : q > 0\}$ voor *Kepler's probleem*

$$V(q) = -\frac{1}{q} + \frac{C}{q^2}$$

met een reële constante $C > 0$. Welke banen beschrijven de planeten?

9. Beschouw het systeem

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + x^2 & \equiv P(x, y) \\ \dot{y} = 2x - y - 3x^2 + \frac{3}{2}xy & \equiv Q(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

- a) Bewijs dat een oplossing van (3) met

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0,$$

correspondeert met een homocliene baan naar het punt $(0, 0)$, d.w.z.,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hint: beschouw het ‘Cartesische blad’:

$$H(x, y) \equiv x^2(1 - x) - y^2 = 0,$$

en bewijs dat dit bestaat uit banen van het systeem (3). Laat hiertoe zien dat het vectorveld van het rechterlid van (3) loodrecht staat op de normaalvector van de kromme $H(x, y) = 0$.

- b) Vind alle rustpunten van het systeem en onderzoek hun stabiliteit door de eigenwaarden van de Jacobi-matrix geëvalueerd op elk van de rustpunten te analyseren.
- c) Schets het faseplaatje van (3) onder de aanname dat er geen periodieke oplossingen zijn.
- d) Bewijs dat er geen periodieke oplossingen zijn.

10. Beschouw de vergelijking $\ddot{q} = \lambda - q^2$.

- a) Bepaal de potentiële energie U van dit klassiek mechanisch systeem.
- b) Voor $\lambda = 0$ en voor minstens twee welgekozen (geef aan waarom deze waarden zijn gekozen) positieve en twee welgekozen negatieve waarden van λ teken het faseplaatje in het (q, v) -vlak op drie verschillende manieren.
- (i) Schets $U = U(q)$ en construeer hieruit het faseplaatje.
- (ii) Gebruik een programma zoals `ImplicitPlot` in `Mathematica` om de niveaукrommen van de totale energie

$$E(q, v) = \frac{v^2}{2} + U(q)$$

te tekenen.

- (iii) Gebruik een programma zoals `pplane` om het systeem

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= \lambda - q^2 \end{aligned}$$

van twee 1e orde vergelijkingen numeriek op te lossen.

- c) Wat verandert bij doorgang van λ door 0?