Hertentamen functionaalanalyse 18 maart 2011

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

Definieer op $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ voor $t \in \mathbb{R}$ de operator $U_t : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ door middel van $U_t\left((x_n)_n\right) = (y_n)_n$ met

$$\begin{aligned} y_{2k-1} &= x_{2k-1} \cos kt \; - \; x_{2k} \sin kt \\ y_{2k} &= x_{2k-1} \sin kt \; + \; x_{2k} \cos kt \end{aligned}$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$.

1. Ga na dat U_t lineair en begrensd is.
2. Geef de matrix $A_t \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die U_t ten opzichte van e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A_t eruit?
3. Laat zien dat U_t unitair is en verifieer $U_{t+\tau} = U_t U_\tau$ voor alle $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Zij $T \in L(E, F)$ een operator tussen Banachruimten.

4. Veronderstel dat $E = F = H$ een Hilbertruimte is en laat zien dat

$$\|T\| \;=\; \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx \mid y \rangle| \; .$$

5. Veronderstel dat $F = H$ een Hilbertruimte is en verifieer
$$\|T\| \quad = \quad \sup_{x\in E}\ \sup_{y\in H} \frac{|\langle Tx \mid y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \quad .$$

6. Toon aan dat
$$\|T\| \quad = \quad \sup_{\substack{\alpha\in F^* \\ \|\alpha\|=1}}\ \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} |\alpha(Tx)| \quad .$$

Zij H een Hilbertruimte en $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (L(H))^{\mathbb{N}}$ een rij van operatoren met de eigenschap
$$\bigvee_{C>0} \quad \max\left(\sup_{l\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\|T_l^* T_k\|}\, , \sup_{l\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\|T_l T_k^*\|}\right) \quad \le \quad C \quad .$$

7. Toon aan dat $\|T_k\| \le C$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

8. Definieer $S_n := \sum_{k=1}^{n} T_k$ en verifieer $S_n^* S_n = \sum_{k,l=1}^{n} T_l^* T_k$.

9. Laat zien dat
$$\|S_n\|^2 \quad \le \quad \sum_{k,l=1}^{n} \sqrt{\|T_l^* T_k\|} \cdot \sqrt{\|T_k^* T_l\|} \quad .$$

10. Bewijs $\|S_n\| \le C$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

11. Zij $x \in H$ en $k, m, n \in \mathbb{N}$ met $m < n$. Ga na dat
$$\|S_n T_k^* x \ - \ S_m T_k^* x\| \quad \le \quad \sum_{l=m+1}^{n} \sqrt{\|T_k T_l^*\|} \cdot \sqrt{\|T_l T_k^*\|} \cdot \|x\| \quad .$$

12. Gegeven $a_1, \ldots, a_m \ge 0$, verifieer $\sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i} \quad \le \quad \sum_{i=1}^{m} \sqrt{a_i} \quad .$

13. Zij $F \ := \ < T_k^* x \mid x \in H, k \in \mathbb{N} >$ en $y \in \overline{F}$. Toon aan dat $(S_n y)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert.

14. Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} S_n z = 0$ voor alle $z \perp F$.

15. Concludeer dat $Sx := \lim_{n\to\infty} S_n x$ een begrensde operator op H definieert met $\|S\| \le C$.