Functionaalanalyse 2010/11

1). Voor wie de inleveropgaven mist: ik zou 12.3 & 12.10 hebben gekozen. Ter afronding toch nog 6.25?

2). Lees in hoofdstukken 9 en 11 van [20] hoe men het probleem van de hangende ketting m.b.v. Sturm–Liouville theorie kan oplossen.

3). Lees in het boek van je keuze de behandelde stof na. [14]: hoofdstukken 1–4 en 6–8, bovendien de secties 5.1 en 5.4–5.6 uit hoofdstuk 5. [16]: hoofdstukken 1, 2, 4 en 5, bovendien de secties 6.1–6.3, 6.5 en 6.7 uit hoofdstuk 6. [6]: hoofdstukken 5–7 en 11, bovendien de secties 3.14–3.17 uit hoofdstuk 3. [20]: hoofdstukken 1–8 en 10. [21]: hoofdstuk 1 (veel weggelaten), hoofdstuk 2 (iets weggelaten), hoofdstuk 3 (t/m sectie 3.6) en hoofdstuk 4, bovendien de secties 5.2, 5.8 en 5.18 uit hoofdstuk 5. [18]: hoofdstukken 0–2 en 7 bovendien de secties 5.1 en 5.2 uit hoofdstuk 5.

4). Fredholm-operatoren worden in [6, 14, 16, 18, 20, 21] niet behandeld. In deel 1 van [1] worden deze m.b.v. uitvoerig uitgelegde opgaven ingevoerd, en daarbij komt ook de fijnstructuur van het spectrum aan de orde.

5). Definieer op een separabele Hilbertruimte H met compleet orthonormaalsysteem $(e_n)_n$ de continue lineaire operator $T : H \longrightarrow H$ als volgt:

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \frac{1}{k}(e_{2k-1} - e_{2k}) \\ Te_{2k} &= \frac{1}{k}(e_{2k-1} + e_{2k}) \ . \end{aligned}$$

(*i*) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A over $\mathbb{R}$ diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over $\mathbb{C}$ eruit?

(*ii*) Laat zien dat T compact is. Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(iii) Bereken T^*T en de spectrale representatie $T^*T = \sum_{\lambda\in\sigma(T^*T)} \lambda\,\pi_\lambda$.

(iv) Hoe ziet de polaire decompositie van T eruit?

6). Gebruik op ℓ^2 het complete orthonormaalsysteem $\big((\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ en definieer $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ d.m.v. de door

$$t_{kl} \quad = \quad \frac{1}{2^{k+l}} \quad \text{voor alle } k, l \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

gegeven oneindige matrix.

(i) Laat zien dat T een continue lineaire operator is.

(ii) Ga na dat T zelfgeadjungeerd is.

(iii) Bereken de Hilbert–Schmidt norm $|||T||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ van T en concludeer dat T compact is.

(iv) Verifieer dat $(\frac{1}{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ een eigenvector van T is en dat alle vectoren loodrecht hierop in $\ker T$ liggen. *Hint:* $|||T|||^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^2$ waar $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de rij van eigenwaarden is (waarin elke eigenwaarde zo vaak voorkomt als zijn multipliciteit aangeeft).

(v) Bereken $\|T\|$ en de spectrale representatie van T.

7). Zij $T \in L(H, F)$ een operator tussen separabele Hilbertruimten waarvoor $\operatorname{im} T < F$ is gesloten. Construeer complete orthonormaalsystemen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van H en $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ van F waarvoor de 'oneindig-dimensionale matrix' $(a_{kl})_{k,l\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ met $a_{kl} = \langle Te_k \mid f_l\rangle$ de volgende gedaante heeft. Voor $k \neq l$ is $a_{kl} = 0$ en voor $k = l$ is of $a_{kl} = 1$ of $a_{kl} = 0$. Verifieer dat voor een operator van eindige rang het aantal 1–en overeenkomt met de rang van T.

8). Verifieer dat

$$\begin{array}{cccc} \alpha : & L^2[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

een begrensde lineaire vorm is en bepaal het element $g \in L^2[0,1]$ dat α representeert; de stelling van Riesz garandeert dat g bestaat.