Tentamen functionaalanalyse 21 januari 2011

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Zij H een separable Hilbertruimte met compleet orthonormaalsysteem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definieer $T \in L(H)$ door middel van $Te_1 = 0$ en

$$Te_{2^k+m} \quad = \quad \frac{\kappa}{k} e_{2^{k+1}-m-1}$$

waarbij $0 \leq m \leq 2^k - 1$ en

$$\kappa \quad = \quad \begin{cases} \mathrm{i} & m \leq 2^{k-1} - 1 \\ & \text{als} \\ -\mathrm{i} & m \geq 2^{k-1} \end{cases} .$$

(*i*) Waarom is T hierdoor goed gedefinieerd?

(*ii*) Geef de matrix $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{C})$ aan die T op het opspansel $< e_4, \ldots, e_7 >$ representeert en bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

(*iii*) Ga na dat T zelfgeadjungeerd is.

(*iv*) Laat zien dat T compact is. Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(*v*) Bepaal de spectrale representatie van T.

2. Definieer voor de reële veelterm $p \in \mathbb{R}[x]$ de afbeelding

$$B \ : \ C([0,1],\mathbb{R}) \times C([0,1],\mathbb{R}) \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$$

door middel van $B(f,g) \ := \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,p(x)\,\mathrm{d}x$.

   (i) Toon aan dat B bilineair is.

   (ii) Bereken een constante $C > 0$ waarvoor $|B(f,g)| \leq C\,\|f\|_2\,\|g\|_2$ en zet B voort tot een continue bilineaire afbeelding B op $L^2([0,1],\mathbb{R}) \times L^2([0,1],\mathbb{R})$.

   (iii) Bepaal een begrensde operator T op $L^2([0,1],\mathbb{R})$ met de eigenschap

$$\bigwedge_{f,g \in L^2([0,1],\mathbb{R})} B(f,g) \ = \ \langle Tf \mid g \rangle \ .$$

   (iv) Onder welke voorwaarden aan p is B eveneens een inproduct op $L^2([0,1],\mathbb{R})$?

   (v) Onder welke extra voorwaarden (naast de voorwaarden uit (iv)) is de norm $\|\!|f|\!\| := \sqrt{B(f,f)}$ equivalent met $\|..\|_2$?

3. Definieer voor vastgehouden $\ell \in \mathbb{N}$ de vermenigvuldigingsoperator

$$S \ : \ L^2([0,1],\mathbb{C}) \ \longrightarrow \ L^2([0,1],\mathbb{C})$$

door middel van $(Sf)(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \ell t} f(t)$.

   (i) Laat zien dat S inverteerbaar is.

   (ii) Verifieer dat het opspansel $F := < \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k t} \mid k \in \mathbb{N}_0 >$ invariant is onder S en dat ook de afsluiting $H = \overline{F}$ invariant is onder S. Concludeer dat $T := S_{|_H}$ een begrensde operator op de Hilbertruimte H definieert.

   (iii) Ga na dat $\ker T = \{0\}$ en $T(F) \neq F$ en bereken binnen H de grootste deelruimte die loodrecht op $T(F)$ staat.

   (iv) Toon aan dat $T \in \Phi(H)$ een Fredholmoperator is en bepaal de index van T.

   (v) Bepaal de spectra $\sigma(S)$ en $\sigma(T)$ en hun onderverdelingen in puntspectrum, continu spectrum, restspectrum en essentiëel spectrum.