Functionaalanalyse 2006/7

Inleverdatum: 24 november 2006 (10:45)

15). Zij $S : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ de rechter shift

$$S(a_1, a_2, a_3, \ldots) \;=\; (0, a_1, a_2, \ldots)$$

en $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ de compacte operator

$$T\left((a_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) \;=\; (\frac{1}{k}a_k)_{k\in\mathbb{N}} \;.$$

Bereken alle eigenwaarden van $S \circ T$ en de spectraalstraal $\rho(S \circ T)$. Hoe verandert het antwoord als men voor S de linker shift

$$S(a_1, a_2, a_3, \ldots) \;=\; (a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

neemt ?

16). Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalsysteem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $T \in L(H)$. Laat zien dat

$$T \text{ compact} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} Te_n \;=\; 0 \;.$$

Hint: ga na dat $\lim_{n\to\infty} \alpha(e_n) = 0$ voor alle $\alpha \in H^* = L(H, \mathbb{K})$.