Functionaalanalyse 2006/7

Inleverdatum: 15 december 2006 (10:45)

21). Zij $k \in C[0,1]^2$ en definieer $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ d.m.v.

$$(Tf)(s) \quad = \quad \int_0^1 k(s,t) f(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

(i) Vind $c > 0$ met $\|Tf\|_\infty \leq c\|f\|_2$ voor alle $f \in C[0,1]$.

Hierdoor kunnen we T voortzetten tot $\hat{T} : L^2[0,1] \longrightarrow C[0,1]$.

(ii) Geef aan waarom ook $\hat{T}$ een compacte operator is.

22). Definieer $V : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ d.m.v.

$$(Vf)(s) \quad = \quad \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

(i) Ga na dat V een compacte lineaire operator op $C[0,1]$ is.

(ii) Bereken alle eigenwaarden van V. *Hint:* Laat zien dat $\|V^n\| \leq \frac{1}{n!}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.