Functionaalanalyse 2006/7

Inleverdatum: 19 januari 2007 (10:45)

25). Zij H een complexe Hilbertruimte en $U \in L(H)$ een unitaire operator. Ga na dat $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C}^2 \mid |\lambda| = 1\}$.

26). Beschouw de Volterraoperator uit opgave 22, voortgezet tot een operator $V : L^2[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$.

- (i) Laat zien dat $\text{rang}(V + V^*) = \dim(\text{im}(V + V^*)) = 1$ is.
- (ii) Ga na dat voor elke zelfgeadjungeerde operator $T \in L(H)$ op een Hilbertruimte H met $\text{rang}T = 1$ een $y \in H$ zodanig bestaat dat T kan worden geschreven als $Tx = \langle x \mid y \rangle\, y$ voor alle $x \in H$.
- (iii) Schrijf de operator $T = V + V^*$ in de vorm $Tf = \langle f \mid g \rangle\, g$ met een passende $g \in L^2[0,1]$.