Stelling (Riesz theorie). *Zij E een complexe Banachruimte van oneindige dimensie en $T \in K(E)$ een compacte operator op E. Dan is $0 \in \sigma(T)$ en elke $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ is een eigenwaarde van T waarvoor de bijbehorende gegeneraliseerde eigenruimte*

$$V_\lambda \;:=\; \left\{ x \in E \;\middle|\; \text{er bestaat } k \in \mathbb{N} \text{ met } (\lambda - T)^k(x) = 0 \right\}$$

eindige dimensie heeft. Als $\sigma(T)$ oneindig veel elementen bevat, dan aftelbaar oneindig veel en 0 is het unieke accumulatiepunt van $\sigma(T)$.

Bewijs. $-T$ is niet inverteerbaar, want anders zou $\mathrm{id} = TT^{-1}$ compact zijn (en dus $\dim E < \infty$), d.w.z. $0 \in \sigma(T)$.
$E_\lambda := \ker(\lambda - T)$ bestaat uit eigenvectoren (of $E_\lambda = 0$, als λ geen eigenwaarde). De restrictie

$$T_{|E_\lambda} : \begin{array}{ccc} E_\lambda & \longrightarrow & E_\lambda \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

is voor $\lambda \neq 0$ een inverteerbare compacte operator, dus $\dim E_\lambda < \infty$.

$$V_\lambda^k \;:=\; \ker(\lambda - T)^k$$

generalizeert de eigenruimte, want $V_\lambda^1 = E_\lambda$ en $(\lambda - T)^{-1}(V_\lambda^k) = V_\lambda^{k+1}$. We hebben te maken met een stijgende rij, d.w.z. $V_\lambda^k \subseteq V_\lambda^{k+1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Zodra $V_\lambda^\ell = V_\lambda^{\ell+1}$ is ook $V_\lambda^\ell = V_\lambda^k$ voor alle $k \geq \ell$ (de rij wordt stationair).

Lemma 1. Als $V_\lambda^k \neq V_\lambda^{k+1}$ dan is er een $x_{k+1} \in V_\lambda^{k+1} \backslash V_\lambda^k$ met $\|x_{k+1}\| = \frac{1}{\lambda}$ en $\|Tx_{k+1} - Ty\| \geq \frac{1}{2}$ voor alle $y \in V_\lambda^k$.
Bewijs (van Lemma 1). Kies $x \in V_\lambda^{k+1}$ met $x \notin V_\lambda^k$, dan is

$$d \;:=\; \inf_{y \in V_\lambda^k} \|x - y\| \;>\; 0$$

(want $V_\lambda^k \subseteq V_\lambda^{k+1}$ gesloten), neem $z \in V_\lambda^k$ met $\|x - z\| \leq 2d$ en definieer

$$x_{k+1} \;:=\; \frac{x - z}{\lambda \|x - z\|} \;\in\; V_\lambda^{k+1} \backslash V_\lambda^k$$

waarmee $\|x_{k+1}\| = \frac{1}{\lambda}$. Bereken

$$\begin{aligned}
\|Tx_{k+1} \;-\; Ty\| \;&=\; \|\lambda x_{k+1} \;-\; (\lambda - T)(x_{k+1}) \;-\; \lambda y \;+\; (\lambda - T)(y)\| \\
&=\; \left\| \frac{1}{\|x - z\|} [x \;-\; z \;-\; \|x - z\| \left((\lambda - T)(x_{k+1}) \;+\; \lambda y \;-\; (\lambda - T)(y)\right)] \right\| \\
&\geq\; \frac{d}{2d} \;=\; \frac{1}{2}\ .
\end{aligned}$$

$\square$

Als $(V_\lambda^k)_k$ niet stationair wordt, dan is volgens Lemma 1 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ een begrensde rij waarvoor $(Tx_k)_k$ geen convergente deelrij bevat, en dat is absurd want T is compact. Zij ℓ minimaal met $V_\lambda^\ell = V_\lambda^{\ell+1}$, dan is $V_\lambda^\ell = V_\lambda$.

Lemma 2. $(\lambda - T)^k = \lambda^k - T_k$ *voor een* $T_k \in K(E)$.
Bewijs (van Lemma 2) met inductie: $k = 1$ $\surd$
en $(\lambda - T)^{k-1}(\lambda - T) = (\lambda^{k-1} - T_{k-1})(\lambda - T)$. $\square$

Dus V_λ^k is de eigenruimte van de compacte operator T^k behorende bij de eigenwaarde $\lambda^k \neq 0$. Dit heeft $\dim V_\lambda^k < \infty$ als gevolg en dus ook $\dim V_\lambda < \infty$.

Laat tenslotte zien dat $\lambda \neq 0$ geïsoleerd punt van $\sigma(T)$ is. D.w.z. geen accumulatiepunt, ofwel de rij(!) van eigenwaarden $\lambda_k \neq 0$ heeft limiet 0.

Lemma 3. Voor $\lambda \neq 0$ *bestaat een gesloten deelruimte* $F_\lambda < E$ *met* $T(F_\lambda) \subseteq F_\lambda$ *en* $E = V_\lambda \oplus F_\lambda$.
Bewijs van Lemma 3 volgt zo meteen.

Merk op dat ook $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ want $(\lambda - T)^\ell(Ty) \stackrel{!}{=} T((\lambda - T)^\ell(y)) = 0$. Schrijf afkortend $T_V := T_{|V_\lambda} : V_\lambda \longrightarrow V_\lambda$ en $T_F := T_{|F_\lambda} : F_\lambda \longrightarrow F_\lambda$. Voor $x \in E$ bestaan (unieke) $y \in V_\lambda$, $z \in F_\lambda$ met $x = y + z \in V_\lambda \oplus F_\lambda$ en

$$Tx \;=\; Ty \;+\; Tz \;=\; T_V y \;+\; T_F z \;\in\; V_\lambda \oplus F_\lambda \;,$$

men noteert dit ook als

$$T \;=\; T_V \oplus T_F : \;\; V_\lambda \oplus F_\lambda \;\longrightarrow\; V_\lambda \oplus F_\lambda \;.$$

Voor $\mu \neq \lambda$ is $\mu - T_V$ inverteerbaar. T_F is compact en λ is geen eigenwaarde van T_F, dus $\lambda \notin \sigma(T_F)$, d.w.z. $\lambda - T_F$ is inverteerbaar, en daarmee ook $\mu - T_F$ inverteerbaar als $|\lambda - \mu|$ voldoende klein is. Als gevolg hiervan bestaat de inverse

$$(\mu - T)^{-1} \;=\; (\mu - T_V)^{-1} \;\oplus\; (\mu - T_F)^{-1}$$

voor alle $\lambda \neq \mu \in U_\varepsilon(\lambda)$ (ε klein) en dus $\sigma(T) \cap U_\varepsilon(\lambda) = \{\lambda\}$. $\square$

Bewijs (van Lemma 3) in meerdere stappen.

1). $\operatorname{im}(\lambda - T) < E$ is gesloten: zij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ en $y = \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda - T)(x_n)$, zoek $x \in E$ met $y = \lambda x - Tx$. Indien $d_n := \inf\limits_{z\in E_\lambda} \|x_n - z\|$ een begrensde rij is bestaan $x'_n \in E$ met $x_n - x'_n \in E_\lambda$ en

$$(\lambda - T)(x_n) \;=\; (\lambda - T)(x'_n)$$

waarvoor de $x'_n (= x_n - z_n)$ een begrensde rij vormen. Omdat T compact is bestaat een deelrij met $\lim\limits_{k\to\infty} Tx'_{n_k} = z \in E$, waarmee

$$\lambda x'_{n_k} \;=\; (\lambda - T)x'_{n_k} \;+\; Tx'_{n_k} \;\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}\; y \;+\; z$$

en dus
$$y \;=\; (\lambda - T)\left(\frac{y+z}{\lambda}\right) \;\in\; \mathrm{im}\,(\lambda - T)\ .$$
We moeten nog laten zien dat $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ begrensd is. Stel van niet, en stap over op een deelrij van $(x_n)_n$ opdat $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \infty$. De $y_n = \dfrac{x_n}{d_n}$ voldoen aan $\inf\limits_{z\in E_\lambda} \|y_n - z\| = 1$, dus er bestaan $y_n' \in U_2(0)$ met

$$(\lambda - T)(y_n') \;=\; (\lambda - T)(y_n) \;=\; \frac{1}{d_n}(\lambda - T)(x_n) \tag{1}$$

en $\inf\limits_{z\in E_\lambda} \|y_n' - z\| = 1$. In de limiet $n \to \infty$ leidt (1) tot

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda - T)(y_n') \;=\; \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_n}\right) \cdot \Big(\lim_{n\to\infty} (\lambda - T)(x_n)\Big) \;=\; 0 \cdot y \;=\; 0$$

en de compactheid van T impliceert $\lim\limits_{k\to\infty} Ty_{n_k}' = z \in E$ voor een welgekozen deelrij, waarmee ook $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}' = \dfrac{z}{\lambda} \in E$ en dat is absurd (want de afstand is en blijft gelijk aan 1). De rij $(d_n)_n$ is dus begrensd.

2). $F_\lambda^k := \mathrm{im}\,(\lambda - T)^k \overset{!}{=} \mathrm{im}\,(\lambda^k - T_k)$ is eveneens gesloten (want ook T_k is compact).

3). $V_\lambda \cap F_\lambda^\ell = \{0\}$. Voor $y \in V_\lambda^\ell \cap F_\lambda^\ell$ bestaat $x \in E$ met $y = (\lambda - T)^\ell(x)$, bovendien is $(\lambda - T)^\ell(y) = 0$ en dus $(\lambda - T)^{2\ell}(x) = 0$, ofwel $x \in V_\lambda^{2\ell} = V_\lambda^\ell$ en dan $y = (\lambda - T)^\ell(x) = 0$.

4). De dalende rij $F_\lambda^k \supseteq F_\lambda^{k+1}$ wordt stationair: er is een $m \in \mathbb{N}$ met $F_\lambda^m = F_\lambda^{m+1}$. Dit volgt met het volgende Lemma, dat men (oefening!) net zo als Lemma 1 kan bewijzen.

Lemma 4. Als $F_\lambda^k \neq F_\lambda^{k+1}$ dan is er een $x_{k+1} \in F_\lambda^k \backslash F_\lambda^{k+1}$ met $\|x_k\| = \dfrac{1}{\lambda}$ en $\|Tx_k - Ty\| \geq \frac{1}{2}$ voor alle $y \in F_\lambda^{k+1}$.

5). $F_\lambda^m = F_\lambda^\ell =: F_\lambda$, d.w.z. met dezelfde index ℓ als bij $V_\lambda = V_\lambda^\ell$. Anders is $m > \ell$ en er bestaat $y \in F_\lambda^{m-1} \subseteq F_\lambda^\ell$ met $y \notin F_\lambda^m$. Vanwege

$$(\lambda - T)(y) \;\in\; F_\lambda^m \;=\; (\lambda - T)(F_\lambda^m)$$

bestaat $z \in F_\lambda^m$ met $(\lambda - T)(y) = (\lambda - T)(z)$, d.w.z. $y - z \in E_\lambda \subseteq V_\lambda^\ell$ en dat is absurd (want $y - z \in F_\lambda^\ell$ en $y - z \neq 0$).

6). $T(F_\lambda) \subseteq F_\lambda$. Voor $z \in F_\lambda$ is $Tz = \lambda z - (\lambda - T)(z) \in F_\lambda$.

7). $E = V_\lambda + F_\lambda$. Voor $x \in E$ is

$$(\lambda - T)^\ell(x) \in F_\lambda = (\lambda - T)^\ell(F_\lambda) \ ,$$

dus bestaat $z \in F_\lambda$ met

$$(\lambda - T)^\ell(x) = (\lambda - T)^\ell(z) \ ,$$

d.w.z. $y := x - z \in V_\lambda = V_\lambda^\ell$.

8). Vanwege 3) en 7) kunnen we elk element $x \in E$ op een unieke manier ontbinden in $x = y + z$ met $y \in V_\lambda$ en $z \in F_\lambda$. I.h.b. zijn de projecties $\pi_V(x) = y$ 'op V_λ langs F_λ' en $\pi_F(x) = z$ 'op F_λ langs V_λ' lineaire operatoren. Laat nu middels inductie zien dat π_V begrensd is (dan is $\pi_F = \mathrm{id} - \pi_V$ eveneens begrensd).

- Indien $\dim V_\lambda = 1$ kunnen we π_V als een lineaire vorm op E opvatten: kies een willekeurige vector $0 \neq v \in V_\lambda$ en definieer $\alpha : E \longrightarrow \mathbb{C}$ d.m.v. $\pi_V(x) = \alpha(x)v$; en omdat $\ker \alpha = F_\lambda$ een gesloten deelruimte van E is volgt dat α (en dus ook π_V) continu is.
- Voor $\dim V_\lambda > 1$ schrijf $V_\lambda = U \oplus W$ met $\dim U = 1$, dan is zoals net gezien de projectie π_1 'op U langs $W + F_\lambda$' continu, en binnen de Banachruimte $W + F_\lambda$ kunnen we de inductiehypothese gebruiken, dus is ook de projectie π_2 'op W langs F_λ binnen $W + F_\lambda$' continu. Maar dan is ook $\pi_V = \pi_1 + \pi_2 \circ (\mathrm{id} - \pi_1)$ continu.

□