Tentamen functionaalanalyse 2 februari 2007

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, mag je dat onderdeel uiteraard wel in de volgende onderdelen gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $T : H \longrightarrow H$ de d.m.v. $Te_k = e_{2k}$ gedefinieerde continue lineaire operator.

   (*i*) Laat zien dat T een isometrie is en bereken de geadjungeerde operator T^*.

   (*ii*) Bepaal de eigenwaarden van T^*. *Hint:* je kunt hiervoor de voor de linker shift gebruikte constructie aanpassen.

   (*iii*) Ga na dat elke eigenruimte van T^* oneindige dimensie heeft.

   (*iv*) Bereken het spectrum $\sigma(T)$.

2. Zij H een (oneindigdimensionale) Hilbertruimte. Schrijf

$$\mathcal{F}(H) \ := \ \left\{ \ T \in L(H) \ \mid \ \mathrm{im}T \text{ is gesloten } \ \& \ \dim(\mathrm{im}T)^{\perp} < \infty \ \& \ \dim\ker T < \infty \ \right\}$$

   voor de verzameling van zg. Fredholmoperatoren.

   (*i*) Laat zien dat voor een zelfgeadjungeerde compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.

   (*ii*) Laat zien dat voor elke compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.

(iii) Zij E nu een Banachruimte en $T \in L(E)$. Doel van deze deelopgave is om een uitbreiding van de definitie van Fredholmoperatoren naar deze setting te vinden. Geef een vervanging voor $(\mathrm{im}T)^\perp$ die in het geval van een Hilbertruimte dezelfde dimensie heeft. Gebruik deze om de verzameling $\mathcal{F}(E) \subseteq L(E)$ van Fredholmoperatoren op E te definiëren. Ga na dat ook dan voor elke compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.

3. Gebruik op ℓ^2 het volledig orthonormaalsysteem $(e_n)_n$ met $e_n = (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ om de continue lineaire operator $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ als volgt de definiëren:

$$
\begin{aligned}
Te_{2k-1} &= \frac{1}{k}(e_{2k-1} - e_{2k}) \\
Te_{2k} &= \frac{1}{k}(e_{2k-1} + e_{2k}) \ .
\end{aligned}
$$

(i) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A over $\mathbb{R}$ diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over $\mathbb{C}$ eruit?

(ii) Laat zien dat T compact is. Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(iii) Bereken T^*T en de spectrale representatie $T^*T = \sum_{\lambda\in\sigma(T^*T)} \lambda\,\pi_\lambda$.

(iv) Hoe ziet de polaire decompositie van T eruit?