Functionaalanalyse 2006/7

Extra opgaven

A). Lees in het boek van je keuze de tot nu toe behandelde stof na. [Saxe]: hoofdstukken 1, 2, 4 en de helft van hoofdstuk 5, bovendien de secties 6.1 en 6.5 uit hoofdstuk 6. [Zeidler]: hoofstuk 1 (veel weggelaten), hoofdstuk 2 (iets weggelaten) en hoofdstuk 3 (t/m sectie 3.6). [Young]: hoofdstukken 1–6 en de helft van hoofdstuk 7. [Rynne & Youngson]: hoofdstukken 1–4. [Dieudonné]: hoofdstukken 5–7 en secties 3.14–3.17 in hoofdstuk 3, bovendien de secties 10.1 en 11.1. [Teschl]: hoofdstuk 1 en de helft van hoofdstuk 2, bovendien de secties 7.1 en 7.3.

B). Zij H een Hilbertruimte en $D \subseteq H$ een deelverzameling. Ga na dat $D^{\perp\perp} = \overline{\langle D \rangle}$.

C). Zij C een begrensde en convexe omgeving van de oorsprong $0 \in \mathbb{R}^2$ die t.o.v. de oorsprong symmetrisch is (d.w.z. $x \in C \Leftrightarrow -x \in C$). Laat zien dat d.m.v.

$$p(x) \quad := \quad \inf \left\{ \lambda \geq 0 \;\middle|\; x \in \lambda C \right\}$$

een norm wordt gedefinieerd, werk hier met $\lambda C := \{ \lambda y \,|\, y \in C \}$. (Ter verduidelijking: contraheer of expandeer C met λ totdat x op de rand van C ligt en stel dan $p(x) = \lambda$.) Men noemt de norm p ook het *Minkowski-funktionaal*.

D). Bereken het spectrum van de voor inleveropgave 6 gedefinieerde operator T.

E). Herlees wat je in lineaire algebra over het diagonaliseren hebt geleerd. In hoeverre kunnen we de voorwaarde "$T \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ heeft geen meervoudige eigenwaarden" achterwege laten?

(i) Stel dat T maar één eigenwaarde λ heeft, dus met algebraische multipliciteit n. Breng dit terug naar het speciaal geval $\lambda = 0$ en laat zien dat dan $T^n = 0$. Hoe hangt het minimaal getal m met $T^m = 0$ samen met de meetkundige multipliciteit van de eigenwaarde 0 ?

(ii) Werk met $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ en stel dat T symmetrisch is, d.w.z. $T^{\mathsf{T}} = T$ (T is gelijk aan zijn getransponeerde). Laat zien dat dan alle eigenwaarden van T reëel zijn en dat eigenvectoren behorende bij verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar staan. Kun je bewijzen dat T in dit geval altijd diagonaliseerbaar is (dus ook als er meervoudige eigenwaarden zijn)?