Functionaalanalyse 2006/7

Extra opgaven

A). Lees in het boek van je keuze de behandelde stof na. [Saxe]: hoofdstukken 1, 2, 4 en 5, bovendien de secties 6.1, 6,5 en 6.7 uit hoofdstuk 6. [Zeidler]: hoofstuk 1 (veel weggelaten), hoofdstuk 2 (iets weggelaten), hoofdstuk 3 (t/m sectie 3.6) en hoofdstuk 4, bovendien de secties 5.2, 5.8 en 5.18 uit hoofdstuk 5. [Young]: hoofdstukken 1–8 en 10. [Rynne & Youngson]: het hele boek. [Dieudonné]: hoofdstukken 5–7 en 11, bovendien de secties 3.14–3.17 uit hoofdstuk 3. [Teschl]: hoofdstukken 0–2 en 7.

B). Zij H een complexe Hilbertruimte en $T \in L(H)$ normaal met de eigenschap, dat het spectrum $\sigma(T) = \{\lambda\}$ alleen uit het punt $\lambda \in \mathbb{C}$ bestaat. Laat zien dat dan $T = \lambda\,\mathrm{id}$.

C). Kan een vermenigvuldigingsoperator op $L^2[0,1]$ van Hilbert-Schmidt type zijn?

D). Zij H een Hilbertruimte en $(U_k)_{k\in\mathbb{N}} \in L(H)^{\mathbb{N}}$ een rijtje van isometrien op H. Wij veronderstellen eerst dat de limiet $U = \lim_{k\to\infty} U_k$ in de Banachalgebra $L(H)$ bestaat.

- (i) Ga na dat U eveneens een isometrie is.
- (ii) Indien alle U_k unitair zijn, is U dan eveneens unitair?

Wij zwakken de convergentie-eis op $(U_k)_k$ af en veronderstellen alleen nog dat voor elke $x \in H$ de puntsgewijze limiet $\lim_{k\to\infty} U_k x$ bestaat. Dit definieert (puntsgewijs) een afbeelding U op H, men noemt deze de 'sterke limiet' en schrijft $U = s\text{-}\lim_{k\to\infty} U_k$. *Opmerking:* de sterke limiet is dus zwakker dan de norm-limiet, en de naam wijst erop dat er een nog zwakkere versie van limiet bestaat (die dan uiteraard de 'zwakke limiet' wordt genoemd).

- (iii) Ga na dat U lineair en een isometrie (dus i.h.b. continu) is.
- (iv) Indien alle U_k unitair zijn, is U dan eveneens unitair? *Hint:* beschouw de d.m.v.

$$U_k(e_j) := \begin{cases} e_{j+1} & \text{als} \quad 1 \le j \le k-1 \\ e_1 & \text{als} \quad j = k \\ e_j & \text{als} \quad j \ge k \end{cases}$$

gedefinieerde rij van unitaire operatoren, waar $(e_j)_j$ een volledig orthonormaalsysteem van een separabele Hilbertruimte H is.

E). Lees in hoofdstukken 9 en 11 van [Young] hoe men het probleem van de hangende ketting m.b.v. Sturm–Liouville theorie kan oplossen.