

Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum: 28 september (11:00)

5). Schrijf $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ voor $x \in \mathbb{R}^n$. Laat zien dat

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|} f(x) \overline{g(x)} dx$$

een inproduct op

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \right\}$$

definieert.

6). Zij V een metrische ruimte. Bewijs de volgende beweringen.

- a). Voor elk punt $x \in V$ bestaan aftelbaar veel omgevingen U_k , $k \in \mathbb{N}$ van x zodanig, dat voor elke omgeving W van x een $l \in \mathbb{N}$ bestaat met $U_l \subseteq W$. Men zegt ook dat V aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet.
- b). Voor V zijn de volgende uitspraken equivalent.
 - (i) Er bestaan aftelbaar veel open verzamelingen U_k , $k \in \mathbb{N}$ zodanig, dat voor elke open verzameling $W \subseteq V$ een $l \in \mathbb{N}$ bestaat met $U_l \subseteq W$. Men zegt dan ook dat V aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.
 - (ii) Er bestaat een aftelbare verzameling $D \subseteq V$ met $\overline{D} = V$ (d.w.z. die in V dicht ligt). Men zegt dan ook dat V separabel is.
- c). Een Banachruimte E is dan en slechts dan separabel (en voldoet dus aan het tweede aftelbaarheidsaxioma), als er een aftelbare verzameling $A \subseteq E$ bestaat waarvoor het (lineaire) opspannel $\langle A \rangle$ een dichtliggende deelvectorruimte van E is.