Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum voor opgaven 21 en 22 is 2 november (11:00)

19). Zij E een Banachruimte en $F \subseteq E$. Laat zien dat F dan en slechts dan een gesloten deelruimte van E is als er een genormeerde ruimte G en een begrensde lineaire operator $T : E \longrightarrow G$ bestaan met $F = \ker T$. *Hint:* bewijs dit eerst voor Hilbertruimten.

20). Gebruik de approximatiestelling van Stone en Weierstraß voor een alternatief bewijs dat de trigonometrische polynomen in $(L^2[0,1], \|..\|_2)$ dicht liggen.

21). Zij $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Ga na dat d.m.v.

$$T\left((a_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) \;=\; (\lambda_i a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

een begrensde lineaire operator $T \in L(\ell^2)$ wordt gedefinieerd.

22). Laat zien dat $\{f \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 = f(1)\}$ dicht ligt in $L^2([0,1],\mathbb{R})$. *Hint:* werk met functies g_n waarvoor $g_n(0) = 0 = g_n(1)$ en $g_n(x) = 1$ voor alle $x \in [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.