

Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum voor opgaven 25 en 26 is 23 november (11:00)

23). Zij B een Banachalgebra met 1 en $T \in B$. Laat zien dat voor $\rho(T) < 1$ het element $1 - T \in B$ inverteerbaar is. *Hint:* ga na dat de meetkundige reeks $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ convergeert.

24). Bereken het spectrum van de voor inleveropgave 10 gedefinieerde operator T .

25). Zij $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ de rechter shift

$$S(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$$

en $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ de compacte operator

$$T((a_k)_{k \in \mathbb{N}}) = \left(\frac{1}{k} a_k\right)_{k \in \mathbb{N}} .$$

Bereken alle eigenwaarden van $S \circ T$ en de spectraalstraal $\rho(S \circ T)$.

Hoe verandert het antwoord als men voor S de linker shift

$$S(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$$

neemt ?

26). Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalstelsel $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $T \in L(H)$. Laat zien dat

$$T \text{ compact} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T e_n = 0 .$$

Hint: ga na dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(e_n) = 0$ voor alle $\alpha \in H^* = L(H, \mathbb{K})$.