Functionaalanalyse 2007/8

Inleverdatum voor opgaven 37 en 38 is 21 december (11:00)

35). Is

$$T \; : \; \begin{array}{ccc} (C[0,1], \|..\|_\infty) & \longrightarrow & (L^2[0,1], \|..\|_2) \\ f & \mapsto & f \end{array}$$

een compacte operator? Pas hiervoor de definitie aan opdat ook een operator tussen verschillende Banachruimten compact is als een van de equivalente uitspraken van stelling 6.1 geldt.

36). Zij H een Hilbertruimte en $(U_k)_{k\in\mathbb{N}} \in L(H)^{\mathbb{N}}$ een rijtje van isometrien op H. Wij veronderstellen eerst dat de limiet $U = \lim\limits_{k\to\infty} U_k$ in de Banachalgebra $L(H)$ bestaat.

(i) Ga na dat U eveneens een isometrie is.

(ii) Indien alle U_k unitair zijn, is U dan eveneens unitair?

Wij zwakken de convergentie-eis op $(U_k)_k$ af en veronderstellen alleen nog dat voor elke $x \in H$ de puntsgewijze limiet $\lim\limits_{k\to\infty} U_k x$ bestaat. Dit definieert (puntsgewijs) een afbeelding U op H, men noemt deze de 'sterke limiet' en schrijft $U = s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} U_k$. *Opmerking:* de sterke limiet is dus zwakker dan de norm-limiet, en de naam wijst erop dat er een nog zwakkere versie van limiet bestaat (die dan uiteraard de 'zwakke limiet' wordt genoemd).

(iii) Ga na dat U lineair en een isometrie (dus i.h.b. continu) is.

(iv) Indien alle U_k unitair zijn, is U dan eveneens unitair? *Hint:* beschouw de d.m.v.

$$U_k(e_j) := \begin{cases} e_{j+1} & \text{als} \quad 1 \le j \le k-1 \\ e_1 & \text{als} \quad j = k \\ e_j & \text{als} \quad j \ge k \end{cases}$$

gedefinieerde rij van unitaire operatoren, waar $(e_j)_j$ een volledig orthonormaalsysteem van een separabele Hilbertruimte H is.

37). Zij $k \in C[0,1]^2$ en definieer $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ d.m.v.

$$(Tf)(s) \;=\; \int_0^1 k(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t \;\;.$$

(i) Vind $c > 0$ met $\|Tf\|_\infty \leq c\|f\|_2$ voor alle $f \in C[0,1]$.

Hierdoor kunnen we T voortzetten tot $\hat{T} : L^2[0,1] \longrightarrow C[0,1]$.

(ii) Geef aan waarom ook $\hat{T}$ een compacte operator is.

38). Definieer $V : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ d.m.v.

$$(Vf)(s) \;=\; \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t \;\;.$$

(i) Ga na dat V een compacte lineaire operator op $C[0,1]$ is.

(ii) Bereken alle eigenwaarden van V. *Hint:* Laat zien dat $\|V^n\| \leq \frac{1}{n!}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.