Functionaalanalyse 2007/8

Opgaven uit het (her)tentamen vorig jaar

1. Gebruik op ℓ^2 het volledig orthonormaalsysteem $((\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ en definieer $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ d.m.v. de door

$$t_{kl} \;=\; \mathrm{e}^{-k-l} \quad \text{voor alle } k, l \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

gegeven oneindige matrix.

(*i*) Laat zien dat T een continue lineaire operator is.

(*ii*) Ga na dat T zelfgeadjungeerd is.

(*iii*) Bereken de Hilbert–Schmidt norm $|||T||| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ van T en concludeer dat T compact is.

(*iv*) Verifieer dat $(\mathrm{e}^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ een eigenvector van T is en dat alle vectoren loodrecht hierop in $\ker T$ liggen. *Hint:* $|||T|||^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^2$ waar $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de rij van eigenwaarden is (waarin elke eigenwaarde zo vaak voorkomt als zijn multipliciteit aangeeft).

(*v*) Bereken $\|T\|$ en de spectrale representatie van T.

2. Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $T : H \longrightarrow H$ de d.m.v. $Te_k = e_{2k}$ gedefinieerde continue lineaire operator.

(*i*) Laat zien dat T een isometrie is en bereken de geadjungeerde operator T^*.

(*ii*) Bepaal de eigenwaarden van T^*. *Hint:* je kunt hiervoor de voor de linker shift gebruikte constructie aanpassen.

(*iii*) Ga na dat elke eigenruimte van T^* oneindige dimensie heeft.

(*iv*) Bereken het spectrum $\sigma(T)$.

3. Gebruik op ℓ^2 het volledig orthonormaalsysteem $(e_n)_n$ met $e_n = (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ om de continue lineaire operator $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ als volgt de definiëren:

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \frac{1}{k}(e_{2k-1} - e_{2k}) \\ Te_{2k} &= \frac{1}{k}(e_{2k-1} + e_{2k}) \ . \end{aligned}$$

(*i*) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A over $\mathbb{R}$ diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over $\mathbb{C}$ eruit?

(*ii*) Laat zien dat T compact is. Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(*iii*) Bereken T^*T en de spectrale representatie $T^*T = \sum_{\lambda\in\sigma(T^*T)} \lambda\, \pi_\lambda$.

(*iv*) Hoe ziet de polaire decompositie van T eruit?