Tentamen functionaalanalyse 29 januari 2008

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

1. Gebruik op $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ het volledige orthonormaalsysteem $(e_n)_n$ met $e_n = (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ om de continue lineaire operator $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ als volgt te definiëren:

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \frac{1}{k}(e_{2k-1} - \mathrm{i}e_{2k}) \\ Te_{2k} &= \frac{1}{k}(\mathrm{i}e_{2k-1} + e_{2k}) \ . \end{aligned}$$

   (*i*) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A eruit?

   (*ii*) Laat zien dat T een compacte zelfgeadjungeerde operator is.

   (*iii*) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

   (*iv*) Bereken de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda$.

2. Beschouw de deelverzameling

$$E \ := \ \left\{ g \in C([0,1],\mathbb{R}) \ \middle| \ \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

   van de Banachruimte $(C([0,1],\mathbb{R}), \|..\|_\infty)$.

(i) Ga na dat E een gesloten deelvectorruimte is.

(ii) Construeer voor gegeven $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ een $h \in E$ met

$$\|f - h\|_\infty = \inf_{g \in E} \|f - g\|_\infty .$$

Waarom is deze bestapproximatie uniek? Laat zien dat de operator

$$\begin{array}{rccc} T : & C([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & C([0,1],\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & h \end{array}$$

lineair en begrensd is.

(iii) Reken $T^2 = T$ na en bepaal het spectrum $\sigma(T)$. Controleer dat E de eigenruimte voor de eigenwaarde 1 is en dat de constante functie $\mathbb{1} : t \mapsto 1$ de eigenruimte voor de eigenwaarde 0 opspant.

(iv) Voorzie $\mathbb{R} \times E$ van de norm $\|(\lambda, g)\|_1 := |\lambda| + \|g\|_\infty$ en ga na dat de bijectie

$$\begin{array}{rccc} S : & \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & C([0,1],\mathbb{R}) \\ & (\lambda, g) & \mapsto & \lambda + g \end{array}$$

een begrensde lineaire operator met begrensde lineaire inverse is.

($bonus$) Is het mogelijk om op $\mathbb{R} \times E$ een norm in termen van $|\lambda|$ en $\|g\|_\infty$ te definiëren waarvoor deze bijectie een isometrie wordt?

3. Definieer de integraaloperator

$$Kf(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) \, \mathrm{d}t$$

op $C([0,1],\mathbb{C})$ d.m.v. $k(s,t) := \sin(2\pi s)\, \mathrm{e}^{-t}$ en zet deze voort tot een begrensde operator K op de complexe Hilbertruimte $L^2([0,1],\mathbb{C})$.

(i) Geef een formule voor de geadjungeerde K^* van K.

(ii) Bereken K^*K en de spectrale representatie $K^*K = \sum_{\lambda \in \sigma(K^*K)} \lambda \, \pi_\lambda$.

(iii) Controleer of K normaal is.

(iv) Bepaal het spectrum van K en de eigenruimten.