Functionaalanalyse 2008/9

Inleverdatum voor opgaven 7 en 8 is 26 september (11:00)

5). Zij H een inproductruimte. Laat zien dat $x+y$ en $\langle x \mid y\rangle$ continue functies definieren. *Hint:* werk met rijtjes $x_n \to x$ en $y_n \to y$.

6). Zij V een metrische ruimte. Bewijs de volgende beweringen.

a). Voor elk punt $x \in V$ bestaan aftelbaar veel omgevingen U_k, $k \in \mathbb{N}$ van x zodanig, dat voor elke omgeving W van x een $l \in \mathbb{N}$ bestaat met $U_l \subseteq W$. Men zegt ook dat V aan het eerste aftelbaarheidsaxioma voldoet.

b). Voor V zijn de volgende uitspraken equivalent.

(i) Er bestaan aftelbaar veel open verzamelingen U_k, $k \in \mathbb{N}$ zodanig, dat voor elke open verzameling $W \subseteq V$ een $l \in \mathbb{N}$ bestaat met $U_l \subseteq W$. Men zegt dan ook dat V aan het tweede aftelbaarheidsaxioma voldoet.

(ii) Er bestaat een aftelbare verzameling $D \subseteq V$ met $\overline{D} = V$ (d.w.z. die in V dicht ligt). Men zegt dan ook dat V separabel is.

c). Een Banachruimte E is dan en slechts dan separabel (en voldoet dus aan het tweede aftelbaarheidsaxioma), als er een aftelbare verzameling $A \subseteq E$ bestaat waarvoor het (lineaire) opspansel $<A>$ een dichtliggende deelvectorruimte van E is.

7). Schrijf $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ voor $x \in \mathbb{R}^n$. Laat zien dat

$$\langle f \mid g\rangle \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|} f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x$$

een inproduct op

$$C_0(\mathbb{R}^n) \quad = \quad \left\{ f \in C(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0 \right\}$$

definieert.

8). Schrijf de details uit voor de inductie in het bewijs van stelling 2.6 van Baire. Heb je hier het keuze-axioma nodig?