Functionaalanalyse 2008/9

Inleverdatum voor opgaven 11 en 12 is 3 october (11:00)

9). Zij H een Hilbertruimte en $F < H$ een gesloten deelruimte. Ga na dat F en de quotientruimte $H/_F$ dan ook Hilbertruimten zijn.

10). Gegeven zijn twee Hilbertruimten E en F, in het vervolg maken we in de notatie geen verschil tussen de door de inproducten geïnduceerden normen $\|y\| = \|y\|_E$ op E en $\|z\| = \|z\|_F$ op F.

(i) Ga na dat de volgende normen op het cartesische product $E \times F$ equivalent zijn:

$$\|(y,z)\|_1 := \|y\| + \|z\| \ , \quad \|(y,z)\|_2 := (\|y\|^2 + \|z\|^2)^{\frac{1}{2}} \ , \quad \|(y,z)\|_\infty := \max\{\|y\|, \|z\|\} \ .$$

Met welke van deze normen is ook $E \times F$ (isometrisch isomorf met) een Hilbertruimte?

(ii) Kies één van bovenstaande normen en laat zien dat de vier lineaire operatoren

$$\begin{aligned} \iota_E : E \longrightarrow E \times F \ , & \quad \iota_E(y) = (y, 0) \\ \iota_F : F \longrightarrow E \times F \ , & \quad \iota_F(z) = (0, z) \\ \pi_E : E \times F \longrightarrow E \ , & \quad \pi_E(y, z) = y \\ \pi_F : E \times F \longrightarrow F \ , & \quad \pi_F(y, z) = z \end{aligned}$$

continu zijn. In hoeverre is dit afhankelijk van de norm die je hebt gekozen?

(iii) Zij H een Hilbertruimte en $E, F < H$ gesloten deelruimten met $H = E + F$ en $E \cap F = \{0\}$, dus elk element $x \in H$ kan op precies één manier worden geschreven als som $x = y + z$ van elementen $y \in E$ en $z \in F$. Onder welke voorwaarden is H isometrisch isomorf met $E \times F$?

11). Ga na dat stelling 4.1 waar blijft indien F een gesloten en convexe deelverzameling van de Hilbertruimte H is.

12). Laat zien dat de natuurlijke inclusie $T : C[0,1] \longrightarrow (C[0,1])^{**}$ in de biduale ruimte die gegeven is door $T_f(\alpha) = \alpha(f)$ voor alle $f \in C[0,1]$ en alle $\alpha \in (C[0,1])^*$ een isometrie is. *Hint:* werk eerst met $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ga na dat elke integreerbare begrensde functie $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ d.m.v.

$$\alpha_g(f) \quad = \quad \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

een element $\alpha_g \in (C[0,1])^*$ definieert en bepaal voor gegeven $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ een geschikte functie g met waarden ± 1 waarvoor $\|f\|_1 = \alpha_g(f)$. Concludeer $\|f\|_1 \leq \|T_f\| \leq \|f\|_1$ en dus gelijkheid. Voor $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kun je met een beschrijving hoe je je constructie moet aanpassen voldoen.