Functionaalanalyse 2008/9

Inleverdatum voor opgaven 19 en 20 is 17 october (11:00)

17). Zij H een Hilbertruimte en $D \subseteq H$ een deelverzameling. Ga na dat $D^{\perp\perp} = \overline{\langle D \rangle}$.

18). Een functie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ is Hölder-continu als

$$\bigvee_{\alpha,\mu>0} \quad \bigwedge_{x,y\in[0,1]} \quad |f(x) - f(y)| \;\leq\; \mu \cdot |x-y|^{\alpha} \ .$$

(In het speciaal geval dat men $\alpha = 1$ kan kiezen hebben we f al als Lipschitz-continu leren kennen.) Voor vaste $\alpha, \mu > 0$ spreken we ook van (α, μ)–Hölder-continue functies.

(i) Ga na dat f dan i.h.b. (gewoon) continu is en dat alle Hölder-continue functies een lineaire deelruimte F van de Banachruimte $(C([0,1],\mathbb{R}), \|..\|_\infty)$ vormen. Is deze deelruimte gesloten?

(ii) Waarom is de verzameling $F_{\alpha,\mu}$ van (α,μ)–Hölder-continue functies niet eveneens een lineaire deelruimte?

(iii) Gegeven $\alpha, \mu > 0$ en $\beta \in \mathbb{R}$ definieer

$$M^{\beta}_{\alpha,\mu} \;:=\; \{\ f \in F_{\alpha,\mu} \ \mid\ f(0) = \beta\ \} \ .$$

Laat zien dat deze verzameling compact is.

19). Zij $F < H$ een gesloten deelruimte van de Hilbertruimte H en $\pi \in L(H)$ de orthogonale projectie op F.

(i) Gegeven een Banachruimte G, laat zien dat een lineaire operator $T : H \longrightarrow G$ dan en slechts dan begrensd is als de restricties $T_{|F} : F \longrightarrow G$ en $T_{|F^\perp} : F^\perp \longrightarrow G$ allebei begrensd zijn.

(ii) Gegeven een Banachruimte E, laat zien dat $T : E \longrightarrow H$ dan en slechts dan lineair en begrensd is als de composities $\pi\circ T : E \longrightarrow F$ en $(1-\pi)\circ T : E \longrightarrow F^\perp$ allebei lineair en begrensd zijn.

(iii) Gegeven een lineaire operator $T : H \longrightarrow H$, laat zien dat $T \in L(H)$ dan en slechts dan als alle vier lineaire operatoren $\pi \circ T_{|F}$, $\pi \circ T_{|F^\perp}$, $(1-\pi) \circ T_{|F}$ en $(1-\pi) \circ T_{|F^\perp}$ begrensd zijn.

20). Ga na of de volgende deelverzamelingen van ℓ^2 compact zijn.

$$\left\{\ a \in \ell^2 \ \middle|\ \|a\|_2 = 1\ \right\}$$

$$\left\{\ a \in \ell^2 \ \middle|\ |a_k| \leq \frac{1}{k} \ \text{ voor alle } k \in \mathbb{N}\ \right\}$$