Functionaalanalyse 2008/9

Inleverdatum voor opgaven 23 en 24 is 24 october (11:00)

21). Zij $T : E \longrightarrow F$ een lineaire operator tussen Banachruimten en $\dim E < \infty$. Laat zien dat T begrensd is.

22). Gebruik de approximatiestelling van Stone en Weierstraß voor een alternatief bewijs dat de trigonometrische polynomen in $(L^2[0,1], \|..\|_2)$ dicht liggen.

23). Laat zien dat $\{f \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 = f(1)\}$ dicht ligt in $L^2([0,1],\mathbb{R})$. *Hint:* werk met functies g_n waarvoor $g_n(0) = 0 = g_n(1)$ en $g_n(x) = 1$ voor alle $x \in [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$.

24). Definieer $C(\mathbb{T}) := \{\, f \in C(\mathbb{R}) \mid f(t+1) = f(t) \text{ voor alle } t \in \mathbb{R} \,\}$.

(i) Geef aan hoe men $C(\mathbb{T})$ als deelruimte van $(C[0,1], \|..\|_\infty)$ kan beschouwen en verifieer dat deze gesloten en dus zelf een Banachruimte is.

(ii) Ga na dat de convolutie

$$(f \star g)(t) \;\; := \;\; \int_0^1 f(t-s)g(s)\mathrm{d}s$$

van twee functies $f, g \in C(\mathbb{T})$ eveneens een 1–periodieke continue functie is.

(iii) Laat zien dat $(C[0,1], \star, \|..\|_\infty)$ een commutatieve Banachalgebra is. Waarom heeft deze geen neutraal element?