Functionaalanalyse 2008/9

Inleverdatum voor opgaven 31 en 32 is 14 november (11:00)

29). Zij E een Banachruimte en $F \subseteq E$. Laat zien dat F dan en slechts dan een gesloten deelruimte van E is als er een genormeerde ruimte G en een begrensde lineaire operator $T : E \longrightarrow G$ bestaan met $F = \ker T$. *Hint:* bewijs dit eerst voor Hilbertruimten.

30). Bereken het spectrum van de voor inleveropgave 16 gedefinieerde operator T.

31). Zij $S : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ de rechter shift

$$S(a_1, a_2, a_3, \ldots) \quad = \quad (0, a_1, a_2, \ldots)$$

en $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ de compacte operator

$$T\left((a_k)_{k \in \mathbb{N}}\right) \quad = \quad (\frac{1}{k} a_k)_{k \in \mathbb{N}} \ .$$

Bereken alle eigenwaarden van $S \circ T$ en de spectraalstraal $\rho(S \circ T)$. Hoe verandert het antwoord als men voor S de linker shift

$$S(a_1, a_2, a_3, \ldots) \quad = \quad (a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

neemt ?

32). Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalsysteem $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $T \in L(H)$. Laat zien dat

$$T \text{ compact} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} T e_n \ = \ 0 \ .$$

Hint: ga na dat $\lim_{n \to \infty} \alpha(e_n) = 0$ voor alle $\alpha \in H^* = L(H, \mathbb{K})$.