Functionaalanalyse 2008/9

Inleverdatum voor opgaven 47 en 48 is 12 december (11:00)

45). Zij $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ een rijtje getallen met $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0$ en H een oneindigdimensionale Hilbertruimte. Construeer een zelfgeadjungeerde compacte operator $T : H \longrightarrow H$ met spectrum $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

46). Zij H een complexe Hilbertruimte en $U \in L(H)$ een unitaire operator. Ga na dat $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

47). Beschouw de deelverzameling

$$E \ := \ \left\{ g \in C([0,1],\mathbb{R}) \ \middle| \ \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

van de Banachruimte $(C([0,1],\mathbb{R}), \|..\|_\infty)$.

(i) Ga na dat E een gesloten deelvectorruimte is.

(ii) Construeer voor gegeven $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ een $h \in E$ met

$$\|f \ - \ h\|_\infty \ = \ \inf_{g\in E} \ \|f - g\|_\infty \ .$$

Waarom is deze bestapproximatie uniek? Laat zien dat de operator

$$\begin{array}{cccc} T \ : & C([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & C([0,1],\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & h \end{array}$$

lineair en begrensd is.

(iii) Reken $T^2 = T$ na en bepaal het spectrum $\sigma(T)$. Controleer dat E de eigenruimte voor de eigenwaarde 1 is en dat de constante functie $\mathbb{1} : t \mapsto 1$ de eigenruimte voor de eigenwaarde 0 opspant.

(iv) Voorzie $\mathbb{R} \times E$ van de norm $\|(\lambda, g)\|_1 := |\lambda| + \|g\|_\infty$ en ga na dat de bijectie

$$\begin{array}{cccc} S \ : & \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & C([0,1],\mathbb{R}) \\ & (\lambda, g) & \mapsto & \lambda + g \end{array}$$

een begrensde lineaire operator met begrensde lineaire inverse is.

(v) Is het mogelijk om op $\mathbb{R} \times E$ een norm in termen van $|\lambda|$ en $\|g\|_\infty$ te definiëren waarvoor deze bijectie een isometrie wordt?

48). Zij H een (oneindigdimensionale) Hilbertruimte. Schrijf

$$\mathcal{F}(H) \ := \ \left\{ \ T \in L(H) \ \ | \ \ \mathrm{im}\, T \text{ is gesloten } \ \& \ \dim(\mathrm{im}\, T)^\perp < \infty \ \& \ \dim \ker T < \infty \ \right\}$$

voor de verzameling van zg. Fredholmoperatoren.

(i) Laat zien dat voor een zelfgeadjungeerde compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.

(ii) Laat zien dat voor elke compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.

(iii) Zij E nu een Banachruimte en $T \in L(E)$. Doel van deze deelopgave is om een uitbreiding van de definitie van Fredholmoperatoren naar deze setting te vinden. Geef een vervanging voor $(\mathrm{im}\, T)^\perp$ die in het geval van een Hilbertruimte dezelfde dimensie heeft. Gebruik deze om de verzameling $\mathcal{F}(E) \subseteq L(E)$ van Fredholmoperatoren op E te definiëren. Ga na dat ook dan voor elke compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.