Tentamen functionaalanalyse 16 januari 2009

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Zij H een separabele Hilbertruimte met volledig orthonormaalsysteem $(e_{l+3})_{l\in\mathbb{N}}$ en $T : H \longrightarrow H$ de d.m.v.

$$\begin{aligned} Te_{3k-2} &= \frac{e_{3k}}{\ln k} \\ Te_{3k-1} &= \frac{e_{3k-1}}{\ln k} \\ Te_{3k} &= \frac{e_{3k-2}}{\ln k} \end{aligned}$$

gedefinieerde continue lineaire operator.

   (i) Geef de matrix $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \subseteq M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. $\{e_{3k-2}, e_{3k-1}, e_{3k}\}$ op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A over $\mathbb{R}$ diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over $\mathbb{C}$ eruit?

   (ii) Laat zien dat T een compacte zelfgeadjungeerde operator is.

   (iii) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

   (iv) Bereken de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\,\pi_\lambda$.

   (v) Hoe ziet de polaire decompositie van T eruit?

2. Men noemt een lineaire operator $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ een spoor-klasse operator als $T = S \circ R$ kan worden geschreven als de compositie van twee Hilbert–Schmidt operatoren $S, R \in K^2(\ell^2)$ en schrijft $K^1(\ell^2)$ voor de verzameling van alle spoor-klasse operatoren op ℓ^2.

(i) Ga na dat $K^1(\ell^2)$ uit compacte operatoren op ℓ^2 bestaat. Kun je nu (of later) bewijzen dat $K^1(\ell^2) < K^2(\ell^2)$ een deelvectorruimte is? Neem in ieder geval aan dat dit klopt en verifieer dat $K^1(\ell^2)$ een tweezijdig ideaal is van de C^*–algebra van alle begrensde operatoren op ℓ^2.

(ii) Laat zien dat de spoor

$$\mathrm{tr}(T) \quad := \quad \sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n \mid e_n \rangle$$

van een spoor-klasse operator eindig is en onafhankelijk van het gekozen volledig orthonormaalsysteem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Hint:* gebruik dat het inproduct

$$\langle R \mid S \rangle \quad = \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle Re_n \mid Se_n \rangle$$

van twee Hilbert–Schmidt operatoren niet van de keuze van $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afhangt.

(iii) Onder welke extra voorwaarde kun je $\mathrm{tr}(T) \;=\; \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda \dim E_\lambda$ bewijzen?

(iv) Verifieer dat $A = \sqrt{T^*T}$ voor $T \in K^1(\ell^2)$ eveneens een spoor-klasse operator is.

(v) Toon aan dat

$$\|T\|_1 \quad := \quad \sum_{n=1}^{\infty} \langle A((\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}) \mid (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}} \rangle$$

(waar $A = \sqrt{T^*T}$ en de rij $(\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ op de n-de plek 1 en verder 0 is) een norm op $K^1(\ell^2)$ definieert.

($bonus$) Laat zien dat T dan en slechts dan in een spoor-klasse operator is als $\|T\|_1 < \infty$.

3. Zij $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een volledig orthonormaalsysteem van de Hilbertruimte H. Definieer $Te_1 := 0$ en voor $k \geq 2$

$$Te_k \quad := \quad \frac{1}{kl} \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{n_i} e_{p_i}$$

waarbij $k = p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{n_l}$ de ontbinding van k in priemgetallen is.

(i) Bereken Te_k voor $k = 51, 52, 53, 54, 55$.

Zet T lineair op het opspansel $F = < e_k \mid k \in \mathbb{N} >$ voort.

(ii) Laat zien dat $T : F \longrightarrow F$ begrensd is en zet T voort tot een begrensde lineaire operator $T : H \longrightarrow H$.

(iii) Hoe werkt de geadjungeerde operator T^* op de e_k ?

(iv) Is T compact?

(v) Construeer een oneindigdimensionale gesloten invariante deelruimte $E < H$ waarvoor de restrictie $T|_E : E \longrightarrow E$ van eindige rang is.