Hertentamen functionaalanalyse 19 maart 2010

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Definieer op $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ de operator $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ door middel van

$$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \;=\; (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

met

$$\begin{aligned} y_{3k-2} &:= \frac{x_{3k-1} - \sqrt{2k}\,x_{3k}}{k\sqrt{2}} \\ y_{3k-1} &:= \frac{x_{3k-2} + x_{3k}}{k\sqrt{2}} \\ y_{3k} &:= \frac{x_{3k-1} - \sqrt{2k}\,x_{3k-2}}{k\sqrt{2}} \end{aligned}$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$.

(i) Ga na dat T lineair en begrensd is.

(ii) Geef de matrix $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) \subseteq M_{3\times3}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. $\{e_{3k-2}, e_{3k-1}, e_{3k}\}$ op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A over $\mathbb{R}$ diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over $\mathbb{C}$ eruit? *Hint:* bereken $T(e_{3k-2} - e_{3k})$.

(iii) Laat zien dat T een compacte zelfgeadjungeerde operator is.

(iv) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(v) Bereken de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\,\pi_\lambda$.

2. Zij B een complexe C^*-algebra met 1 en $U \in B$ unitair. Doel van deze opgave is om een functionaalrekening zoals in stelling 10.17 mogelijk te maken.

   (i) Zij $V \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ compact. Toon aan dat de complexe veeltermen
   $$p(z, z^{-1}) \quad = \quad \sum_{k=-n}^{m} c_k z^k \tag{1}$$
   dicht liggen in $C(V, \mathbb{C})$. *Hint:* gebruik $\bar{z} = z^{-1}$ op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

   (ii) Verifieer dat er hooguit één continue en involutieve algebra-homomorfisme $\Phi_U : C(\sigma(U), \mathbb{C}) \longrightarrow B$ bestaat die de 1 behoudt en de identiteit $z \mapsto z$ omzet in de operator U. Hierbij betekent involutief dat Φ_U de involutie respecteert, dat wil zeggen $\Phi_U(\bar{f}) = (\Phi_U(f))^*$ voor alle $f \in C(\sigma(U), \mathbb{C})$.

   (iii) Bereken $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ en $\gamma \in \mathbb{C}$ van $q(z) = \lambda - \sum_{k=-n}^{m} c_k z^k$ in de ontbinding
   $$q(z) \quad = \quad \frac{\gamma}{z^\alpha} \prod_{j=1}^{\beta} (\nu_j - z) \ .$$
   Geef aan waarom zo'n ontbinding bestaat.

   (iv) Definieer $\Phi_U(p) := \sum_{k=-n}^{m} c_k U^k$ voor alle complexe veeltermen (1). Ga na dat $\sigma(\Phi_U(p)) = p(\sigma(U))$ en concludeer dat Φ_U op de dichte deelruimte van veeltermen (1) continu is.

   (v) Laat zien dat $\Phi_U(\lim_{n\to\infty} p_n) := \lim_{n\to\infty} \Phi_U(p_n)$ een isometrie $\Phi_U : C(\sigma(U), \mathbb{C}) \longrightarrow B$ definieert.

3. Definieer voor $g \in C[-1, 1]$ de integraaloperator
   $$(T_g f)(s) \quad := \quad \int_0^1 g(s-t) f(t) \, \mathrm{d}t$$
   op $C[0, 1]$ en zet deze voort tot een begrensde operator
   $$T_g \ : \ L^2[0, 1] \ \longrightarrow \ L^2[0, 1] \ .$$

   (i) Onder welke voorwaarde aan g is T_g zelfgeadjungeerd?

   (ii) Laat zien dat T_g altijd compact is. Zijn deze operatoren zelfs altijd Hilbert–Schmidt operatoren?

   (iii) Bereken voor $g(t) = \cos 2\pi t$ de spectrale representatie van T_g.

   (iv) Geef voor $g(t) = \cos 2\pi n t$, $n \in \mathbb{N}_0$ de ingrediënten van de spectrale representatie van T_g aan. Wat is de samenhang met Fourierreeksen?

   (v) Bepaal voor $g(t) = \mathrm{i} \sin 2\pi n t$, $n \in \mathbb{N}$ de spectrale representatie van T_g.