Functionaalanalyse 2009/10

Opgaven uit vroegere (her)tentamens en meer

83). Lees in het boek van je keuze de behandelde stof na. [Rynne & Youngson]: hoofdstukken 1–4 en 6–8, bovendien de secties 5.1 en 5.4–5.6 uit hoofdstuk 5. [Saxe]: hoofdstukken 1, 2, 4 en 5, bovendien de secties 6.1–6.3, 6.5 en 6.7 uit hoofdstuk 6. [Dieudonné]: hoofdstukken 5–7 en 11, bovendien de secties 3.14–3.17 uit hoofdstuk 3. [Young]: hoofdstukken 1–8 en 10. [Zeidler]: hoofstuk 1 (veel weggelaten), hoofdstuk 2 (iets weggelaten), hoofdstuk 3 (t/m sectie 3.6) en hoofdstuk 4, bovendien de secties 5.2, 5.8 en 5.18 uit hoofdstuk 5. [Teschl]: hoofdstukken 0–2 en 7 bovendien de secties 5.1 en 5.2 uit hoofdstuk 5.

84). Lees in hoofdstukken 9 en 11 van [Young] hoe men het probleem van de hangende ketting m.b.v. Sturm–Liouville theorie kan oplossen.

85). Definieer op een separabele Hilbertruimte H met compleet orthonormaalsysteem $(e_n)_n$ de continue lineaire operator $T : H \longrightarrow H$ als volgt:

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{2k-1} - e_{2k}) \\ Te_{2k} &= \frac{1}{\sqrt{k}}(e_{2k-1} + e_{2k}) \ . \end{aligned}$$

(*i*) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A over $\mathbb{R}$ diagonaliseerbaar? Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A over $\mathbb{C}$ eruit?

(*ii*) Laat zien dat T compact is. Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(*iii*) Bereken T^*T en de spectrale representatie $T^*T = \sum_{\lambda \in \sigma(T^*T)} \lambda\, \pi_\lambda$.

(*iv*) Hoe ziet de polaire decompositie van T eruit?

86). Zij H een (oneindigdimensionale) Hilbertruimte. Schrijf

$$\mathcal{F}(H) \;:=\; \{\; T \in L(H) \;\mid\; \operatorname{im} T \text{ is gesloten } \& \; \dim(\operatorname{im} T)^{\perp} < \infty \; \& \; \dim \ker T < \infty \;\}$$

voor de verzameling van zg. Fredholmoperatoren.

(*i*) Laat zien dat voor een zelfgeadjungeerde compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.

(*ii*) Laat zien dat voor elke compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.

(*iii*) Zij E nu een Banachruimte en $T \in L(E)$. Doel van deze deelopgave is om een uitbreiding van de definitie van Fredholmoperatoren naar deze setting te vinden. Geef een vervanging voor $(\operatorname{im} T)^{\perp}$ die in het geval van een Hilbertruimte dezelfde dimensie heeft. Gebruik deze om de verzameling $\mathcal{F}(E) \subseteq L(E)$ van Fredholmoperatoren op E te definiëren. Ga na dat ook dan voor elke compacte operator A de operator $\mathrm{id} - A$ een Fredholmoperator is.

87). Gebruik op ℓ^2 het complete orthonormaalsysteem $((\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ en definieer $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ d.m.v. de door

$$t_{kl} \;=\; \frac{1}{2^{k+l}} \quad \text{voor alle } k, l \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

gegeven oneindige matrix.

(*i*) Laat zien dat T een continue lineaire operator is.

(*ii*) Ga na dat T zelfgeadjungeerd is.

(*iii*) Bereken de Hilbert–Schmidt norm $|||T||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ van T en concludeer dat T compact is.

(*iv*) Verifieer dat $(\frac{1}{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ een eigenvector van T is en dat alle vectoren loodrecht hierop in $\ker T$ liggen. *Hint:* $|||T|||^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda_m|^2$ waar $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de rij van eigenwaarden is (waarin elke eigenwaarde zo vaak voorkomt als zijn multipliciteit aangeeft).

(*v*) Bereken $\|T\|$ en de spectrale representatie van T.