Tentamen functionaalanalyse 22 januari 2010

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Gebruik op $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{C})$ het complete orthonormaalsysteem $(e_n)_n$ met $e_n = (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ om de continue lineaire operator $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ als volgt te definiëren:

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \frac{1}{k}(2e_{2k-1} + \mathrm{i}e_{2k}) \\ Te_{2k} &= \frac{1}{k}(\mathrm{i}e_{2k-1} + 4e_{2k}) \ . \end{aligned}$$

   (*i*) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Hoe ziet de Jordan normaalvorm van A eruit?

   (*ii*) Laat zien dat T een compacte operator is.

   (*iii*) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

   (*iv*) Construeer rijtjes $(D_j)_j$ en $(N_j)_j$ van diagonaliseerbare en nilpotente operatoren op ℓ^2 van eindige rang met $D_jN_j = N_jD_j$ voor alle $j \in \mathbb{N}$ en

$$\lim_{j\to\infty} \|D_j + N_j - T\| = 0 \ .$$

   (*v*) Bereken de spectrale representatie $D = \sum_{\lambda\in\sigma(D)} \lambda\, \pi_\lambda$ van $D = \lim_{j\to\infty} D_j$.

2. Beschouw voor $f, g \in G := C([-1,1], \mathbb{R})$ de uitdrukking

$$\langle f \mid g \rangle \quad = \quad \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\, g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t \ .$$

(*i*) Laat zien dat dit een inproduct definieert, dat wil zeggen G voorzien van $\langle .. \mid .. \rangle$ is een inproductruimte.

(*ii*) Completeer G tot een Hilbertruimte H en ga na dat de functie

$$\eta(t) \quad = \quad \begin{cases} +1 & t \in [0,1] \\ & \text{als} \\ -1 & t \in [-1,0[\end{cases}$$

als element van H kan worden opgevat. Bereken de norm van η.

(*iii*) Orthonormaliseer $1, t, t^2, t^3, \ldots$ en geef de eerste drie zo verkregen veeltermen expliciet aan.

(*iv*) Verifieer dat de zo verkregen veeltermen T_n afwisselnd even en oneven zijn.

(*bonus*) Laat zien dat T_n al zijn wortels in het interval $[-1,1]$ heeft. *Hint:* stel van niet voor zekere $m \in \mathbb{N}$ en beschouw de veelterm $p = \prod(t - t_i)$ die precies de wortels t_i van T_m heeft die wel in $[-1,1]$ liggen. Wat kun je over $\langle p \mid T_m \rangle$ zeggen?

3. Zij $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een compleet orthonormaalsysteem van de reële Hilbertruimte H. Definieer $Te_1 = 0$, $Te_2 = Te_3 = \frac{e_1}{\sqrt{2}}$, $Te_4 = \ldots = Te_7 = \frac{e_2}{2}$ en algemeen

$$Te_{2^k} \quad = \quad \ldots \quad = \quad Te_{2^{k+1}-1} \quad = \quad \frac{e_k}{\sqrt{2^k}}$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$. Zet T lineair op het opspansel $F = < e_k \mid k \in \mathbb{N} >$ voort.

(*i*) Bewijs voor reële getallen $a_1, \ldots, a_n$ de ongelijkheid

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \quad \leq \quad n \sum_{l=1}^{n} a_l^2 \ .$$

Hint: gebruik inductie.

(*ii*) Laat zien dat $T : F \longrightarrow F$ begrensd is en zet T voort tot een begrensde lineaire operator $T : H \longrightarrow H$. *Hint:* werk met lineaire combinaties $\sum_{i=1}^{2^m-1} a_i e_i$.

(*iii*) Hoe werkt de geadjungeerde operator T^* op de e_k ?

(*iv*) Ga na dat $\lim_{l\to\infty} Te_l = 0$.

(*bonus*) Is T compact?