Tentamen functionaalanalyse 31 januari 2020

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- Alle deelopgaves tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Zij H een separabele Hilbertruimte met compleet orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $T : H \longrightarrow H$ de d.m.v.

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \frac{\mathrm{i}}{k^2}\, e_{2k} \\ Te_{2k} &= \frac{-\mathrm{i}}{k^2}\, e_{2k-1} \end{aligned}$$

gedefinieerde continue lineaire operator.

(i) Geef de matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A diagonaliseerbaar?

(ii) Ga na dat T zelfgeadjungeerd is.

(iii) Laat zien dat T een compacte operator is.

(iv) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(v) Bereken de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda$ en zo mogelijk ook $\sqrt{T}$.

2. Beschouw op ℓ^2 de linker shift

$$\begin{aligned} S_l \; : \quad \ell^2 &\longrightarrow \ell^2 \\ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} &\mapsto (a_{k+1})_{k\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

en de compacte vermenigvuldigingsoperator

$$T : \begin{array}{ccc} \ell^2 & \longrightarrow & \ell^2 \\ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} & \mapsto & (\frac{a_k}{k})_{k\in\mathbb{N}} \end{array}$$

waarmee $V := S \circ T$ een van de quasi-nilpotente operatoren uit opgave 7.9. Deze opgave laat (uit het ongerijmde) zien dat $\sqrt{V}$ ondanks $\sigma(V) = \{0\}$ niet bestaat. Veronderstel dus de existentie van $W \in L(\ell^2)$ met $W^2 = V$.

(*i*) Ga na dat W eveneens quasi-nilpotent is.

(*ii*) Laat zien dat $\overline{\operatorname{im} V^*}$ een gesloten hypervlak (deelruimte van co-dimensie 1) is die loodrecht op $(\delta_{1k})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ staat en bevat is in $\overline{\operatorname{im} W^*}$. *Hint:* $(\operatorname{im} V^*)^\perp = \ker V$.

(*iii*) Toon aan dat $W((\delta_{1k})_{k\in\mathbb{N}})$ loodrecht op $\overline{\operatorname{im} W^*}$ staat en concludeer $W((\delta_{1k})_{k\in\mathbb{N}}) = 0$.

(*iv*) Reken na dat $V(W((\delta_{2k})_{k\in\mathbb{N}})) = 0$ en daarom $W((\delta_{2k})_{k\in\mathbb{N}}) = \lambda(\delta_{1k})_{k\in\mathbb{N}}$ met een scalair λ.

(*v*) Concludeer $V((\delta_{2k})_{k\in\mathbb{N}}) = 0$ en breng de oorspronkelijke veronderstelling tot een contradictie.

3. Doel van deze opgave is om $T \in L(H)$, H separabele Hilbertruimte, te bestuderen die ontstaat door de $(k \times k)$–matrices

$$A_k = \begin{pmatrix} -\frac{1}{k^2} & \frac{1}{k^2} & \cdots & \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{k^2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{k^2} & \cdots & \frac{1}{k^2} & -\frac{1}{k^2} \end{pmatrix}$$

langs de diagonaal te juxtaponeren.

(*i*) Ga na dat deze T als volgt op het compleet orthonormaalsysteem $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gedefinieerd kan worden. Met $n_k := \frac{1}{2}k(k-1) = \sum_{l=1}^{k-1} l$ voor alle $k \in \mathbb{N}$ geldt

$$T(e_j) = -\frac{2}{k^2}e_j + \frac{1}{k^2}\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} e_i$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$ en alle $j = n_k + 1, \ldots, n_{k+1}$. Verifieer dat T zelfgeadjungeerd is.

(*ii*) Beschrijf voor alle $k \in \mathbb{N}$ de eigenwaarden van A_k en de bijbehorende eigenruimten.

(*iii*) Laat zien dat T een compacte operator is.

(*iv*) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

(*v*) Bepaal de ingrediënten van de spectrale representatie $T = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \lambda\, \pi_\lambda$.