Tentamen functionaalanalyse 5 februari 2021

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- Alle deelopgaves tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Zij H een separabele Hilbertruimte met compleet orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $T : H \longrightarrow H$ de d.m.v.

$$\begin{aligned} Te_{3k-2} &= \frac{4}{\sqrt{k}}\, e_{3k-2} - \frac{6}{\sqrt{k}} e_{3k-1} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{k}} e_{3k} \\ Te_{3k-1} &= \frac{6}{\sqrt{k}}\, e_{3k-2} + \frac{5}{\sqrt{k}} e_{3k-1} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{k}} e_{3k} \\ Te_{3k} &= \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{k}}\, e_{3k-2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{k}} e_{3k-1} + \frac{7}{\sqrt{k}} e_{3k} \end{aligned}$$

gedefinieerde continue operator.

   (i) Geef de matrix $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ aan die T t.o.v. e_{3k-2}, e_{3k-1} en e_{3k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert. Is A diagonaliseerbaar?

(ii) Ga na dat T normaal is.

(iii) Laat zien dat T een compacte operator is.

(iv) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

2. Zij H een Hilbertruimte en $\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ een oneindige lineair onafhankelijke deelverzameling van H.

   (i) Construeer een orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van H waarvan het lineaire opspansel $< e_k \mid k \in \mathbb{N} >$ overeenstemt met het lineaire opspansel $< b_k \mid k \in \mathbb{N} >$.

   (ii) Concludeer dat H een deelruimte F bevat die isometrisch isomorf is met ℓ^2.

   (iii) Ga na dat $(2^{-k})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ en dat de reeks $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} e_k$ convergent is.

   (iv) Laat zien dat $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} e_k \notin < e_k \mid k \in \mathbb{N} >$.

   (v) Bewijs dat H geen aftelbare basis kan hebben. *Hint:* argumenteer uit het ongerijmde en veronderstel dat H een aftelbare basis $\{b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ heeft.

3. Gebruik op ℓ^2 het volledig orthonormaalsysteem $((\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ en definieer $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ d.m.v. de door

$$t_{kl} = \frac{1}{kl} \quad \text{voor alle } k, l \in \mathbb{N}$$

   gegeven oneindige matrix.

   (i) Ga na dat T een continue lineaire afbeelding is.

   (ii) Laat zien dat T zelfgeadjungeerd is.

   (iii) Bereken de Hilbert–Schmidt norm van T en concludeer dat T compact is.

   (iv) Verifieer dat $(\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$ een eigenvector van T is en bepaal ook alle andere eigenwaarden.