Tentamen functionaalanalyse 2 februari 2022

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- Alle deelopgaves tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Zij H een separabele Hilbertruimte met compleet orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $T : H \longrightarrow H$ de d.m.v.

$$\begin{aligned} Te_{2k-1} &= \cos(k)\, e_{2k-1} \;+\; 4\sqrt{3}\sin(k)\, e_{2k-1} \;-\; 7\sin(k)\, e_{2k} \\ Te_{2k} &= 7\sin(k)\, e_{2k-1} \;+\; \cos(k)\, e_{2k} \;-\; 4\sqrt{3}\sin(k)\, e_{2k} \end{aligned}$$

gedefinieerde begrensde operator.

(*i*) Geef de matrix $A_k \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ aan die T t.o.v. e_{2k-1} en e_{2k} op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert en bereken de eigenwaarden van A_k. Is A_k diagonaliseerbaar?

(*ii*) Ga na of T een normale operator is.

(*iii*) Is T een compacte operator? Bepaal ook de Hilbert–Schmidt norm van T.

(*iv*) Kun je $\sqrt{T}$ berekenen?

(*v*) Splits het spectrum van T in puntspectrum, continu spectrum en restspectrum.

Hint: $\pi \notin \mathbb{Q}$.

(*bonus*) Welke spectraalwaarden zijn essentiëel?

2. Zij H een Hilbertruimte, $T \in L(H)$ en $T = UA$ een polaire decompositie.

(*i*) Laat zien dat T compact als A compact is.

(*ii*) Geef een voorbeeld met T compact maar A niet compact.

(*iii*) Met welke eis aan de (constructie van de) polaire decompositie impliceert T compact dat ook A compact moet zijn?

(*iv*) Voor A zelfgeadjungeerd toon aan dat A^2 dan en slechts dan compact is als A compact is en generalizeer naar A^n, $n \geq 3$.

3. Gebruik op ℓ^2 het compleet orthonormaalsysteem $((\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ en definieer $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ d.m.v. de door

$$t_{kl} \quad = \quad \frac{|k-l|}{k^2 l^2} \quad \text{voor alle } k, l \in \mathbb{N}$$

gegeven oneindige matrix.

(*i*) Laat zien dat T een continue lineaire afbeelding is.

(*ii*) Ga na of T zelfgeadjungeerd is.

(*iii*) Is T een compacte operator?

(*iv*) Toon aan dat T een Hilbert–Schmidt operator is.