Zwakke Topologie en Toepassingen

Charlie Tang, Jasper van de Vuurst & Louis Xiangqian Lu

February 2023

1 Algemene topologische vectorruimtes

Definitie. Een *topologisch veld* $\mathbb{K} = (F, \mathcal{T})$ is een veld voorzien van een topologie zodat de afbeeldingen

$$(+) : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}; (x, y) \mapsto x + y,\ (\cdot) : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

$$-() : \mathbb{K} \to \mathbb{K}; x \mapsto -x,\ ()^{-1} : \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K} \setminus \{0\}; x \mapsto x^{-1}$$

continu zijn in de topologie $\mathcal{T}$.

Definitie. Een *topologische vectorruimte(TVS)* $X = (V, \mathcal{T})$ is een vectorruimte V over een topologisch lichaam $\mathbb{K}$ voorzien van een topologie $\mathcal{T}$ zodat de operatoren

$$(+) : X \times X \to X; (v, w) \mapsto v + w,\ (\cdot) : \mathbb{K} \times X \to X : (\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

continu zijn. Een topologie $\mathcal{T}$ die van V een TVS maakt heet een *vector-topologie* op V.

Er zal vanaf nu worden aangenomen dat $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ met de Euclidische topologie, alhoewel veel stellingen ook voor meer topologische velden geldig zijn.

Stelling. Elke vector-topologie op een vectorruimte is compatibel met de vermenigvuldiging en optelling. Dat wil zeggen dat voor alle $v \in V$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, de functies

$$(v+) : X \to X; x \mapsto v + x,\ (\lambda\cdot) : X \to X; x \mapsto \lambda x$$

homeomorfismen zijn.

Bewijs: Voor alle $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ zijn de composities van continue functies

$$(v+) = (+) \circ (x \mapsto (v, x)),\ (\lambda\cdot) = (\cdot) \circ (x \mapsto (\lambda, x))$$

continu. Dit betekent dat ook $(-v+)$ en $(\frac{1}{\lambda}\cdot)$ (voor $\lambda \neq 0$) continu zijn, en dus dat sinds

$$(-v+) \circ (v+) = \mathrm{id},\ (\frac{1}{\lambda}\cdot) \circ (\lambda\cdot) = \mathrm{id},$$

deze functies allemaal bijectieve functies met continue inverse, oftewel homeomorfismen, zijn. $\square$

Een TVS-isomorfisme is een lineair homeomorfisme. De functie $(v+)$ is geen TVS-isomorfisme als $v \neq 0$, sinds dan $(v+)(0) = v + 0 = v \neq 0$. De functie $(\lambda\cdot)$ is wel een TVS-isomorfisme voor $\lambda \neq 0$, sinds

$$(\lambda\cdot)(0) = \lambda 0 = 0,\ (\lambda\cdot)(v + w) = (\lambda\cdot)(v) + (\lambda\cdot)(w), (\lambda\cdot)(\alpha v) = \alpha(\lambda\cdot)(v).$$

Voorbeelden van TVS'en zijn de bekende Banach- en Hilbertruimten, maar er zijn veel klassen van en specifieke TVS'en te vinden die niet per se Banachruimten zijn. Bijvoorbeeld de bredere klasse van genormeerde vectorruimten (oftewel normeerbare TVS'en), de klasse van metriseerbare TVS'en (Fréchet-ruimten), en de ruimte van alle telbare rijtjes reële getallen met de product-topologie. Elke vectorruimte V vormt met de triviale topologie $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, V\}$ een TVS, sinds elke functie $U \to (V, T_0)$ dan continu is, inclusief optelling en vermenigvuldiging. In tegenstelling tot de triviale topologie is de discrete topologie $T_d = \mathcal{P}(V)$ op een vectorruimte V alleen een vector-topologie als $V = \{0\}$, ook al is T_d compatibel met vermenigvuldiging en optelling. (Herinner dat er wordt aangenomen dat $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ met de Euclidische topologie.) Sinds $\{0\} \in T_d$ zou anders

$$U_0 = (\cdot)^{-1}(\{0\}) = (\{0\} \times V) \cup (\mathbb{K} \times \{0\})$$

open zijn. Voor elke $v \in V$ met $0 \neq v$ heeft het punt $(0, v) \in U_0$ in U_0 geen open omgeving, sinds $(-r, r) \times \{v\} \nsubseteq U_0$ voor alle $r > 0$. De triviale topologie illustreert dat een TVS niet per se Hausdorff hoeft te zijn, al kan elke TVS wel Hausdorff gemaakt worden "zonder informatie te verliezen" door het quotient $X/\overline{\{0\}}$ met *de afsluiting van 0* te nemen.

Stelling. Voor elk TVS $X = (V, \mathcal{T})$ geldt dat $X/\overline{\{0\}}$ Hausdorff is.

Bewijs: Eerst zal bewezen worden dat een TVS $X = (V, \mathcal{T})$ met de eigenschap T_1 ook Hausdorff is, oftewel dat als

$$T_1 : \forall x, y \in V; x \neq y \Rightarrow \exists U_{xy} \in \mathcal{T}; (x \in U_{xy} \wedge y \notin U_{xy}),$$

dan ook

$$H : \forall x, y \in V; x \neq y \Rightarrow \exists V_{xy}, W_{xy} \in \mathcal{T}; (x \in V_{xy} \wedge y \in W_{xy} \wedge V_{xy} \cap W_{xy} = \emptyset).$$

Neem aan dat T_1 geldt. Voor een gegeven $x \in V$ geldt dan dat

$$U_x = \bigcup_{y \in V,\, y \neq x} U_{yx} = V \setminus \{x\}$$

en U_x open is, sinds $y \in U_{yx}$, $x \notin U_{yx}$, en elke U_{yx} open is.
Voor elke open omgeving $U \in \mathcal{T}$ van 0 bestaan er open omgevingen $U', U'' \in \mathcal{T}$ van 0 met $U' + U'' \subseteq U$ sinds $(+)$ continu is (en $(0, 0) \in (+)^{-1}(U)$), en dus is $U_+ = U' \cap U''$ een open omgeving van 0 met $U_+ + U_+ \subseteq U$. Voor elke $y, x \in V$ met $x \neq y$ kan deze constructie toegepast worden op $V \setminus \{y - x\}$, een open omgeving van 0, om een open omgeving U van 0 te vormen met

$$U + U \subseteq V \setminus \{y - x\},$$

oftewel $(\{x\} + U + U) \cap \{y\} = \emptyset$. Sinds voor alle $R, S, T \subseteq V$ geldt dat $(R + S) \cap T = \emptyset$ desda $R \cap (T - S) = \emptyset$, geldt ook dat $(x + U) \cap (y - U) = \emptyset$, waarmee is bewezen dat X Hausdorff is.
Definieer de relatie $\sim$ op V als

$$x \sim y \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{T}; (x \in U \Rightarrow y \in U),$$

oftewel $x \sim y$ desda y bevat is in elke omgeving van x. Deze relatie is natuurlijk reflexief, en sinds x en y door het homeomorfisme $v \mapsto x+y-v$ op elkaar worden afgebeeld, is $\sim$ een symmetrische relatie. Het is ook transitief sinds als $x \sim y$ en $y \sim z$, dan

$$\forall U \in \mathcal{T}, x \in U \to y \in U \to z \in U$$

en dus ook $x \sim z$. Dit betekent dat $\sim$ een equivalentierelatie is, en dus dat elke $x \in V$ een equivalentieklasse $[x]$ heeft, waarvoor geldt dat $[x] = \overline{\{x\}}$ sinds $[x]$ de doorsnede is van alle omgevingen van x. Er geldt voor alle $x, y \in V$ en $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ sinds $(x+)$ en $(\lambda\cdot)$ homeomorfismen zijn dat

$$[x+\lambda y] = \bigcap_{x+\lambda y \in U \in \mathcal{T}} U = \bigcap_{y \in U \in \mathcal{T}} x + \lambda U = x + \lambda \bigcap_{y \in U \in \mathcal{T}} U = x + \lambda[y],$$

Nu geldt ook dat $[0] = \overline{\{0\}}$ een deelruimte van V is sinds $0 \in [0]$ en als $x, y \in [0]$ en $\lambda \in \mathbb{K}$ dan

$$[x+\lambda y] = x + \lambda[y] = x + \lambda[0] = [x] = [0].$$

Voor alle $[x], [y] \in V/[0] \cong V/\sim$ met $[x] \neq [y]$ geldt dat $x \not\sim y$, en dus dat er een $U \in \mathcal{T}$ bestaat met $x \in U \not\ni y$, dus $[x] \subseteq U$ en $U \cap [y] = \emptyset$, en dus geldt voor $U' = U/\sim \in \mathcal{T}/\sim$ dat $[x] \in U' \not\ni [y]$. Dit betekent dat $X/\overline{\{0\}} \cong X/\sim$ voldoet aan de eigenschap T_1, en Hausdorff is. $\square$

Deze constructie wordt bijvoorbeeld gebruikt om de ruimte $L^2([0,1])$ van kwadraat-integreerbare functies met de integraalnorm Hausdorff te maken.

Veel concepten en stellingen die we voor Banach- en Hilbertruimten kennen kunnen worden uitgebreid naar grotere klassen TVS'en, alhoewel de formulatie vaak anders moet zijn, en de algemene stellingen dus meestal iets zeggen wat alleen in Banach- en Hilbertruimten equivalent is aan de formulaties die daar bekend zijn.
Later zullen we het hebben over de (continue) duale ruimte van een TVS $X = (V, \mathcal{T})$. De algebraïsche duale ruimte van V is de ruimte V^* van lineaire functies (functionalen) $V \to \mathbb{K}$. De continue duale ruimte van X is de deelruimte $X' \leq V^*$ van lineaire functionalen die continu zijn met de gegeven topologie op V. Eindig-dimensionale Hausdorff ruimten zijn isomorf aan hun eigen algebraïsche en continue duale ruimte, voor Banach- en Hilbertruimten is de continue duale ruimte gelijk is aan de ruimte van lineaire functionalen met begrensde norm, maar voor bijvoorbeeld een TVS X met de triviale topologie geldt dat $X' = \{0\}$ sinds een functie van een triviale naar een Hausdorff ruimte continu desda constant is. Er is over het algemeen zeer veel te zeggen - of ten minste te vragen - over continue duale ruimten, daarom ook dat het gebied functionaalanalyse heet.

Definitie. Een (mogelijk lege) deelverzameling S van een vectorruimte V heet

- convex als $\forall t \in [0,1]; tS + (1-t)S \subset S$.
- gebalanceerd als $\forall t \in B(0,1) \subset \mathbb{C}; tS \subseteq S$.
- absorberend als $\forall x \in V; \exists r > 0; \forall t \in \mathbb{R}; |t| > r \to x \in tS$.
- absoluut convex of een disk als het gebalanceerd en convex is.
- een ton/loop als het een gesloten absorberende disk is.

Er geldt in elke TVS $(X, \mathcal{T})$ dat elke omgeving van 0 absorberend is, sinds als voor een $0 \in U \in \mathcal{T}$ en $x \in X$ niet aan de conditie voldaan wordt, er geen $r > 0$ is met $B(0,r)x \subset \mathbb{K}x \cap U$. Dit zou betekenen dat $\mathbb{K}x$ niet uitgerust is met de Euclidische of triviale topologie, want met allebij deze topologieën zou sinds $\mathbb{K}x \cap U$ een open omgeving van 0 is, $B(0,r)x \subseteq \mathbb{K}x \cap U$ voor een $r > 0$. Dit is in tegenspraak met de volgende stelling, die stelt dat de Euclidische en triviale de enige vector-topologieën op een 1-dimensionale vectorruimte zijn.

Stelling. Er zijn maar twee vector-topologieën op de 1-dimensionale vectorruimte $\mathbb{K}$. Op de ruimte $\mathbb{K}^n$ zijn er op TVS-isomorfisme na $(n+1)$ vector-topologieën, waarvan er één Hausdorff is.

Bewijs: Stel dat een vector-topologie $\mathcal{T}$ op de 1-dimensionale ruimte V niet triviaal is. Dan bestaat er een $U \in \mathcal{T}$ met $U \neq V, \emptyset$. Er geldt voor elke $r > 0$ en elke $S \subseteq V$ dat

$$B(0,r)S = \{sx| \ |s| < r, \ x \in S\} = V$$

desda er een onbegrensde rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S ligt. Door de continuïteit van $(\cdot)$ moeten er een $r > 0$ en $S \in \mathcal{T}$ bestaan met $B(0,r) \times S \subseteq (\cdot)^{-1}(U)$, oftewel $B(0,r)S \subseteq U$, wat sinds $U \neq V$ betekent dat S begrensd is. Door de translatie-invariantie van $\mathcal{T}$ kan S gekozen worden zodat $0 \in S$. Neem een $x \in S$ met $x \neq 0$. Dan geldt dat $(\cdot x) : \mathbb{K} \to V; \alpha \mapsto \alpha x$ een continue lineaire bijectie is. Sinds $\mathcal{T}$ gesloten is onder scalaire vermenigvuldiging (behalve met 0, maar we hebben $0 \in S$ gekozen) en unie, geldt dat $B(0,1)S \in \mathcal{T}$. Sinds $B(0,1)S = B(0,\alpha)x$ voor $\alpha = \sup\{|\lambda| \mid \lambda x \in S\}$, geldt voor elke $r > 0$ dat er een $U_r \in \mathcal{T}$ is met $U_r \subseteq (\cdot x)(B(0,r))$, specifiek met $U_r = \frac{r}{2\alpha}B(0,\alpha)x$. Dit betekent dat de inverse van $(\cdot x)$ ook continu is, en dus dat $(\cdot x)$ een TVS-isomorfisme is, wat betekent dat $\mathcal{T} \cong \mathcal{T}_E$ voor $\mathcal{T}_E$ de Euclidische topologie. Nu geldt dus dat er op elke 1-dimensionale vectorruimte, en specifiek op $\mathbb{K}$, alleen de triviale en Euclidische vector-topologieën mogelijk zijn.
Elke TVS $X = (\mathbb{K}^n, \mathcal{T})$ over een eindig-dimensionale vectorruimte $\mathbb{K}^n$ kan geschreven worden als $\overline{\{0\}} \oplus F$ voor een $F \leq \mathbb{K}^n$. Neem twee TVS'en $X_1 = (\mathbb{K}^n, \mathcal{T}_1), X_2 = (\mathbb{K}^n, \mathcal{T}_2)$ over $\mathbb{K}^n$. Als je aanneemt dat $X_1 \cong X_2$, dan bestaat er een TVS-isomorfisme $A : X_1 \to X_2$, waarvoor moet gelden dat $A(\overline{\{0\}}_{X_1}) = \overline{\{0\}}_{X_2}$, en dus $\dim(\overline{\{0\}}_{X_1}) = \dim(\overline{\{0\}}_{X_2})$. Als geldt dat $\dim(\overline{\{0\}}_{X_1}) = \dim(\overline{\{0\}}_{X_2})$, dan ook $\dim(F_{X_1}) = \dim(F_{X_2})$, en dan bestaan er dus bijectieve lineaire afbeeldingen $A_0 : \overline{\{0\}}_{X_1} \to \overline{\{0\}}_{X_2}$ en $A_1 : F_{X_1} \to F_{X_2}$. Deze afbeeldingen zijn ook meteen TVS-isomorfismen sinds $\overline{\{0\}}_{X_{1,2}}$ de triviale topologie bezitten en $F_{X_{1,2}}$ beide de Euclidische topologie bezitten, en alle bijecties tussen TVS'en met beide dezelfde van deze topologieën TVS-isomorfismen zijn. Dus $A_0 \oplus A_1$ is een TVS-isomorfisme tussen X_1 en X_2.
Uiteindelijk geldt dus dat $X_1 \cong X_2$ desda $\dim(\overline{\{0\}}_{X_1}) = \dim(\overline{\{0\}}_{X_2})$, wat betekent dat er in totaal $n+1$ vector-topologieën op $\mathbb{K}^n$ mogelijk zijn, waarvan alleen die met $\dim(\overline{\{0\}}) = 0$ Hausdorff is. $\square$

Definitie. Een *lokaal convexe topologische vectorruimte(LCTVS)* is een TVS die een topologiebasis rond 0 heeft van convexe gebalanceerde absorberende verzamelingen.

Zoals eerder vermeld is de eis van absorberendheid overbodig, en in feite hoeft ook niet geëist te worden dat de basis gebalanceerd is sinds elke convexe basis een absoluut convexe basis voortbrengt. Een voorbeeld van een ruimte die niet lokaal convex is is de ruimte ℓ^p voor $0 < p < 1$.

Stelling. Voor alle $0 < p < 1$ is de ruimte

$$\ell^p = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} | \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$$

met de vector-topologie gedefinieerd door de metriek

$$d_p(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - y_k|^p$$

een TVS, maar geen LCTVS.

Bewijs: Stel dat er een niet-lege convexe open omgeving U van 0 is. Dan is er een $\delta > 0$ met $B(0, \delta) \subseteq U$, en dus $\delta^{1/p} e_n \in U$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ met e_n de n-de basisvector uit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Sinds U convex is moet ook voor elke $n \in \mathbb{N}$ gelden dat $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \delta^{1/p} e_n \in U$, maar sinds

$$d(0, v_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{n^p} = \frac{\delta}{n^{p-1}} = \delta n^{1-p} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

is U onbegrensd onder de metriek. Er zitten dus geen niet-lege convexe verzamelingen in de open bollen $B(0, \delta)$, en er is dus ook geen topologie-basis rond 0 van convexe verzamelingen. □

Definitie. Een *seminorm* op een vectorruimte V is een functie $n : V \to \mathbb{R}$ die subadditief en absoluut homogeen is, oftewel waarvoor de volgende eigenschappen gelden:

$$\forall x, y \in V; n(x + y) \leq n(x) + n(y),$$

$$\forall x \in V, s \in \mathbb{K}; n(sx) = |s| n(x).$$

Een seminorm is dus ook wel een norm die niet positief definiet hoeft te zijn.

In de praktijk wordt bijna altijd de volgende equivalente definitie van een LCTVS gebruikt om eigenschappen te bewijzen en specifieke ruimten op te stellen.

Stelling. Een TVS $X = (V, \mathcal{T})$ is een LCTVS desda $\mathcal{T}$ gegenereerd wordt door een familie seminormen N, dat wil zeggen dat het de grofste topologie is die al deze functies continu maakt, oftewel dat de verzamelingen

$$B(n, 0, \epsilon) = \{x \in V | n(x) < \epsilon\}$$

voor alle $n \in N$ en $\epsilon > 0$ een topologie-subbasis rond 0 vormen. Dan wordt X ook wel als (V, N) genoteerd.

Bewijs: Alle $B(n, 0, \epsilon)$ als in de stelling zijn convex sinds als $x, y \in B(n, 0, \epsilon)$ dan $n(x) < \epsilon$ en $n(y) < \epsilon$, en dus ook voor alle $0 \leq t \leq 1$

$$n(tx + (1 - t)y) \leq n(tx) + n((1 - t)y) = tn(x) + (1 - t)n(y) < t\epsilon_+(1 - t)\epsilon = \epsilon,$$

en dus

$$tB(n, 0, \epsilon) + (1 - t)B(n, 0, \epsilon) \subseteq B(n, 0, \epsilon)$$

voor alle $0 \leq t \leq 1$. Dit betekent dat de verzameling van eindige intersecties van deze open ballen een convexe topologie-basis rond 0 vormen.

Elke convexe gebalanceerde absorberende verzameling S is een open bal rond 0 van een bepaalde seminorm (oftewel van de vorm $B(n,0,1)$), specifiek met

$$n_S : V \to \mathbb{K}; x \mapsto \inf\{\alpha \in \mathbb{R} | x \in \alpha S\}.$$

Nu geldt dat voor elke convexe gebalanceerde absorberende topologie-basis $\mathcal{B}$ rond 0 dat de familie $n_S|S \in \mathcal{B}$ van seminormen $\mathcal{T}$ genereert. $\square$

De topologie gegenereerd door een familie seminormen N is hetzelfde als die gegenereerd door de *opwaartse afsluiting*

$$\hat{N} = \{n_I : V \to \mathbb{K}; x \mapsto \max_{n \in I} n(x) | I \subseteq N, I \text{ eindig}\},$$

en in het vervolg zal aangenomen worden dat elk familie die niet expliciet geconstrueerd wordt opwaarts gesloten is, dus $\hat{N} = N$. Deze constructie zorgt ervoor dat de open ballen $B(n,0,\epsilon)$ niet alleen een subbasis maar ook een basis van de topologie rond 0 vormen, en dit versimpelt uitspraken over wanneer een open verzameling een open bol bevat. De opwaartse afsluiting van een eindige familie is eindig, en van een telbare familie is telbaar.

Een rij $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ in een LCTVS (V,N) is convergent naar $x \in V$ desda

$$\forall n \in N; \lim_{k\to\infty} n(x_k - x) = 0.$$

Nu zal een stelling die later nodig is bewezen worden, maar eerst een hulpstelling.

Hulpstelling - (formule (8.2) uit [1]). Laat $X = (V,N)$ en $Y = (W,M)$ LCTVS'en zijn. Dan is een lineaire afbeelding $A : V \to W$ continu desda er voor elke $m \in M$ een $c > 0, n \in N$ bestaan met

$$\forall x \in V; m(A(x)) \leq cn(x).$$

Bewijs: Voor elke $a \in V$ en omgeving U van $A(a)$ in Y zijn er een $m \in M$ en $\epsilon > 0$ met $B(m, A(a), \epsilon) = \{x \in W | m(x - A(a)) < \epsilon\} \subseteq U$. Als er een c en n zijn zoals in de stelling, dan geldt voor alle $x \in B(n, a, \epsilon/c)$ dat

$$m(A(x) - A(a)) = m(A(x - a)) \leq cn(x - a) < \epsilon,$$

en dus wordt er een omgeving van a in X afgebeeld in U, wat betekent dat A continu is (in elke a.)
Neem nu aan dat A continu is. Voor elke $m \in M$, $a \in V$ en $\epsilon > 0$ bestaan er dan $\delta > 0$ en $n \in N$ waarvoor

$$\forall x \in V; n(x - a) < \delta \to m(A(x) - A(a)) < \epsilon.$$

Dit is equivalen aan $\forall x \in V; n(x) < \delta \to m(A(x)) < \epsilon$, en dus sinds n non-negatief en absoluut homogeen is ook aan

$$\forall x \in V; n(x) \leq 2n(x) \to m(A(x)) \leq \frac{2\epsilon}{\delta} n(x).$$

Sinds $n(x) \leq 2n(x)$ altijd waar is, geldt nu dus dat als A continu is, er voor elke $m \in M$ een $c = \frac{2\epsilon}{\delta}$ en $n \in N$ bestaan zoals in de stelling. $\square$

Stelling - (Lemma 8.7 uit [1]). Laat (V,N) en (W,M) LCTVS'en zijn. Dan is elke continue lineaire $A : V \to W$ rij-continu. Als N telbaar is dan geldt het omgekeerde ook, dus dan is elke rij-continue lineaire $A : V \to W$ ook continu.

Bewijs: Stel dat A continu is en $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ naar $x \in V$ convergeert. Volgens de hulpstelling geldt voor elke $m \in M$ dan:

$$m(A(x) - A(x_j)) = m(A(x - x_j)) \leq cn(x - x_j) \xrightarrow{j\to\infty} 0,$$

en dus convergeert $(A(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$ ook naar $A(x)$, en is A rij-continu.
Stel dat N telbaar is. Dan bestaat er een nummering $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ van N, en is

$$(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}} = (\max_{1\leq k\leq j} n_k)_{j\in\mathbb{N}}$$

een toenemende rij seminormen die dezelfde topologie als N genereert. Als A niet continu is bestaat er volgens de hulpstelling een $m \in M$ waarvoor voor elke ν_j en $c > 0$ een $x_{c,j} \in V$ bestaat met $m(A(x_{c,j})) > c\nu_j(x_{c,j})$. Laat $c_j = j$ en $y_j = \frac{1}{m(A(x_{c_j,j}))} x_{c_j,j}$. Dan geldt dat

$$1 = m(A(y_j)) > j\nu_j(y_j)$$

en dus $\lim_{j\to\infty} y_j = 0$ (sinds de ν_j toenemend zijn) terwijl $A(y_j)$ niet naar 0 convergeert, en dus is A niet rij-continu. Als A wel rij-continu (en N telbaar) is, is A dus ook continu. □

2 Zwakke en sterke topologie

Voor twee topologieën τ_1 en τ_2 op een verzameling X is τ_1 *zwakker* dan τ_2 als $\tau_1 \subset \tau_2$. Zij X nu een topologische vectorruimte. Dan is X' de ruimte van continue lineaire functionalen.

Definitie. De *zwakke topologie* $\sigma(X, X')$ op een topologische vectorruimte X is de topologie voortgebracht door de continue/begrensde duale ruimte X'. Zij $S = \{\cap_{i \in I} f_i^{-1}(O_i) | I \text{ eindig}, f_i \in X', O_i \text{ open in } \mathbb{K}\}$, dan is $\sigma(X, X') = \{\cup_{U \in O} U | O \subset S\}$ de *zwakke topologie.*

Dit is de verzameling van alle verenigingen van eindige intersecties van verzamelingen van de vorm $f^{-1}(O)$, waarbij O een open verzameling in $\mathbb{R}$ en f zit in de duale ruimte X'. Dit is de *zwakste* topologie zodanig dat alle elementen van X' continu blijven. Nu een kort bewijs dat dit daadwerkelijk een topologie is

Bewijs. Het is duidelijk dat $\varnothing = f^{-1}(\varnothing) \in S$ en $X = f^{-1}(\mathbb{K}) \in S$ voor een $f \in X'$, en dus $\varnothing, X \in \sigma(X, X')$. Het is verder ook duidelijk dat $\sigma(X, X')$ gesloten onder verenigingen is. Er rest enkel nog aan te tonen dat het gesloten is onder eindige intersecties, hierbij kan nu gebruik gemaakt worden van de manier waarop S gedefinieerd wordt.
Zij $X_1, X_2 \in \sigma(X, X')$, dan geldt er dat er $O_1, O_2 \in S$ zijn zodanig dat $X_1 = \{\cup_{U \in O_1} U$ en $X_2 = \{\cup_{U \in O_2} U$. Het is nu duidelijk dat $X_1 \cap X_2 = \cup_{U_i \in O_1, U_j \in O_2} U_i \cap U_j$ en aangezien S gesloten is onder eindige intersecties, geldt er dat $U_i \cap U_j \in S$ voor alle $U_i \in O_1, U_j \in O_2$ en dus $X_1 \cap X_2 \in \sigma(X, X')$. Uit inductie volgt nu dat $\sigma(X, X')$ gesloten is onder eindige intersecties. □

Voor rijen in de zwakke topologie geldt nu het volgende.

Stelling. Een rij $(x_n)_n$ convergeert in de *zwakke topologie* naar x dan en slechts dan als voor alle $f \in X'$ geldt dat $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$. We zeggen dan dat $(x_n)_n$ *zwak convergeert* naar x. Notatie $x_n \rightharpoonup x$.

Voor het bewijs van deze stelling verwijzen we naar deel 2 Proposition 7 van [3] van David Lecomte. Hier nog een voorbeeld.

Remark 2.1. *Als X een Hilbertruimte is, dan geldt volgens de representatiestelling van Riesz dat $x_n \rightharpoonup x$ d.e.s.d.a $\langle x_n | y \rangle \rightharpoonup \langle x | y \rangle$ voor alle $y \in X$ [5].*

Zij nu dat X een reëel genormeerde ruimte is.

We gaan nu X in zijn biduale ruimte X'' inbedden met behulp van $T : X \to X''$ met $T : x \mapsto T_x$ waarbij $T_x : X' \to \mathbb{K}$ en $T_x(f) = f(x)$. T is een injectieve lineaire afbeelding. In het geval dat T ook surjectief is, dan is X reflexief.

Definitie. De *zwakke-'-topologie* op de continue duale ruimte X' van een topologische vectorruimte X is de topologie voortgebracht door $T(X) \subset X''$.

Merk op dat in het geval dat X reflexief is, dan geldt er dat de *zwakke topologie* op X gelijk is aan de *zwakke-'-topologie* op $X'' = X$. De *zwakke-'-topologie* op X' is per definitie zwakker dan de *zwakke topologie* op X', maar in het geval van reflexiviteit zijn ze dus ook gelijk.

Met de stelling van Hahn-Banach kan men bewijzen dat op X een zwakke topologie Hausdorff is. Hiervoor willen we eerst Hahn-Banach in zijn geometrische vorm krijgen. We beginnen bij de algemene Hahn-Banach stelling. Hiervoor gaan we geen bewijs leveren, deze is heel uitgebreid en te vinden in [4].

Stelling. (Algemene Hahn-Banach Stelling) Zij X een reële genormeerde vectorruimte met subadditieve en positief homogene functie p. Dit betekent $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ voor alle $x, y \in V$ en $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ voor alle $x \in X$ en $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Zij $V < X$ een deelruimte van X en $f_V : V \to \mathbb{R}$ een lineaire afbeelding begrensd door p, $f_V(z) \leq p(z)$ voor alle $z \in V$. Dan geldt dat er een uitbreiding $f_X : X \to \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $f_X(x) \leq p(x)$ voor alle $x \in X$.

We gaan nu een p vinden die hieraan kan voldoen. Zij C een convexe deelverzameling van X zodanig dat 0 een inwendig punt is van C.

Definitie. Voor alle $x \in X$, definiëren we de *Minkowski-functionaal* als $p(x) := \inf\{\lambda \geq 0 | x \in \lambda C\}$.

Merk op dat het verschil met opgave 1.18 in [2], is dat $x \in \mathbb{R}^2$ en dat C daar ook symmetrisch en begrensd is. De Minkowski-functionaal voldoet aan de volgende eigenschappen.

Lemma. (i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ voor alle $x, y \in X$.
(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ voor alle $x \in X$ en $\lambda \geq 0$.
(iii) $p(x) < 1$ geeft $x \in C$.
(iv) $x \in C$ dan $p(x) \leq 1$.

Bewijs. (i) Zij $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ en $\lambda_1 x, \lambda_2 y \in C$. Uit de eerste eis volgt direct dat $x \in \lambda_1^{-1} C$ en $y \in \lambda_2^{-1} C$. Uit de convexiteit van C volgt dat $\frac{x+y}{\lambda_1^{-1}+\lambda_2^{-1}} = \frac{\lambda_1^{-1}}{\lambda_1^{-1}+\lambda_2^{-1}} \lambda_1 x + (1 - \frac{\lambda_1^{-1}}{\lambda_1^{-1}+\lambda_2^{-1}}) \lambda_2 y \in C$. Hieruit volgt dat $p(x+y) \leq \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} \leq p(x) + p(y)$.
(ii) Merk op dat $p(0) = 0$ en voor $\lambda > 0$ geldt er dat $p(\lambda x) = \inf\{\mu \geq 0 | \lambda x \in \mu C\} = \lambda \inf\{\nu \geq 0 | x \in \nu C\} = \lambda p(x)$.
(iii) Als $p(x) < 1$ geldt per definitie en gebruikmakend van de convexiteit van C dat er een $\lambda < 1$ moet zijn, zodanig dat $x \in \lambda C$. Voor $\lambda = 0$ zijn we klaar, zij nu dat $\lambda > 0$. Er geldt dan dat $\lambda^{-1} > 1$ en $\lambda^{-1} x \in C$. Gebruikmakend van de convexiteit van C, zien we dat $x = \lambda(\lambda^{-1} x) + (1-\lambda) 0 \in C$.
(iv)Simpel, $x \in 1C$ en dus per definitie $p(x) \leq 1$. $\square$

Met behulp van de stelling van Hahn-Banach kan de volgende stelling worden bewezen. Dit is de eerste stap om de algemene vorm in de geometrische vorm te krijgen.

Stelling. (*Supporting Hyperplane Theorem*) Zij C een open convexe deelverzameling van reëel genormeerde vectorruimte X die niet leeg is. Voor $y \in C$ en $x_0 \in X \setminus C$ geldt dat er een continue lineaire afbeelding $f \in X'$ bestaat zodanig dat $1 = f(x_0 - y) \geq f(x - y)$ voor alle $x \in C$.

Bewijs. We transleren eerst C zodanig dat het de oorsprong bevat. Zij $C' = C - y$ en $x_0' = x_0 - y \neq 0$ en dus geldt er dat $0 \in C'$. Definieer $g : \mathbb{R}x_0' \to \mathbb{R}$ met $g(\lambda x_0') := \lambda$, deze is welgedefinieerd wegens $x_0' \neq 0$. Laten we nu de Minkowski-functionaal p op C' definiëren en nu bewijzen we dat g begrensd is door p. Hierbij scheiden we de gevallen voor $g(\lambda x_0') > 0$ en $g(\lambda x_0') \leq 0$.
Voor $\lambda > 0$ weten we dat $x_0' \notin C'$ en uit de (iii) van de Lemma volgt dat $p(x_0') \geq 1$. Dit geeft ons $p(\lambda x_0') = \lambda p(x_0') \geq \lambda = g(\lambda x_0') > 0$.
Voor $\lambda \geq 0$ weten we dat $g(-x_0') = -1 < 0 \leq p(-x_0')$. Dit geeft ons $g(-\lambda x_0') = -\lambda \leq 0 \leq p(-\lambda x_0')$.
We zien dus dat $g(x) \leq p(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}x_0'$. Algemene Hahn-Banach Stelling geeft nu een uitbreiding $f : X \to \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $f(x) \leq p(x)$ voor alle $x \in X$. Merk op dat $f(x_0') = g(x_0') = 1 \geq p(x)$ voor alle $x \in C'$ volgt uit (iv) van de Lemma. Hieruit volgt dat $f(x_0') \geq p(x) \geq f(x)$ voor alle $x \in C'$ en door terug te transleren zien we dat er geldt dat

$1 = f(x_0 - y) \geq f(x - y)$ voor alle $x \in C$. Nu rest nog enkel om te bewijzen dat f continu is. Omdat f lineair is, hoeven we enkel lokaal continuiteit te bewijzen. C' is open en dus geldt er dat er een $B(0;\delta) \subset C'$ bestaat. Zij $\epsilon > 0$, dan geldt voor $\|y\| < \delta\epsilon$ dat $\pm\frac{y}{\epsilon} \in C'$ en dus $p(\pm\frac{y}{\epsilon}) \leq 1$. Hieruit volgt dat $\pm f(\frac{y}{\epsilon}) = f(\pm\frac{y}{\epsilon}) \leq p(\pm\frac{y}{\epsilon}) \leq 1$ en dus $|f(y)| \leq \epsilon$ en is f continu. $\square$

Hieruit volgt de stelling waarin we Hahn-Banach in zijn geometrische vorm zien. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de volgende lemma.

Lemma. *Zij A, B convexe deelverzamelingen van X. Dan is de Minkowski-som $A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$ convex.*

Bewijs. $(1-t)(a_1 + b_1) + t(a_2 + b_2) = ((1-t)a_1 + ta_2) + ((1-t)b_1 + tb_2) \in A + B$ voor alle $a_1, a_2 \in A$ en $b_1, b_2 \in B$. $\square$

Stelling. (*Hyperplane Separation Theorem*) Zij A en B twee disjuncte, convexe en niet lege-verzamelingen van X en verder is A open. Dan bestaat er een continu lineaire afbeelding $\alpha \in X'$ en een $c \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\alpha(a) < c \leq \alpha(b)$ voor alle $a \in A$ en $b \in B$

Bewijs. Zij $Z : A - B = A + (-B) = \{a - b | a \in A, b \in B\}$. Uit de lemma volgt dat Z convex is. A en B zijn disjunct en dus $0 \notin Z$. Als $a_0 \in A$, dan bestaat er een omgeving $B(a_0 - b_0, \delta) = B(a_0, \delta) - b_0 \subset Z$ van $a_0 - b_0$ en $a_0 - b_0 \in \text{inw}(Z) \neq \varnothing$. Door $x_0 = 0 \in X \setminus Z$ en $y := a_0 - b_0$ te kiezen zien we dat Z voldoet aan de Supporting Hyperplane Theorem. Er geldt dus dat er een $f \in X'$ bestaat met $1 = f(0 - y) \geq f((a - b) - y)$ voor alle $a - b \in Z$. Uit de lineairiteit van f volgt nu dat $f(a - b) \leq f(0) = 0$. We concluderen nu dat $f(a) \leq f(b)$ voor alle $a \in A$ en $b \in B$. Er geldt dan dat $f(a_0) \leq \sup_{a \in A} f(a) \leq \inf_{b \in B} f(b) \leq f(b_0)$ voor alle $a_0 \in A$ en $b_0 \in B$.
Kies nu $c = \inf_{b \in B} f(b)$ en dus $f(a) \leq c \leq f(b)$ voor alle $a \in A$ en $b \in B$. We bewijzen nu uit het ongerijmde nog verder de linker strikte ongelijkheid. Als $a \in A$ met $f(a) = c$, bestaat er een $\delta > 0$ zodanig dat $a - \delta y \in A$ omdat A open is. Dan geldt er dat $f(a - \delta y) = f(a) + \delta f(-y) = c + \delta > c$, tegenspraak. We concluderen nu dat $f(a) < c \leq f(b)$ voor alle $a \in A$ en $b \in B$. $\square$

$f^{-1}(c)$ is de hyperplane die de verzamelingen A en B separeert. De separatie stelling is Hahn-Banach in zijn geometrische vorm. Nu kunnen we eindelijk de stelling gaan bewijzen.

Stelling. Op X is de *zwakke topologie* Hausdorff.

Bewijs. Zij x en y distincte punten in X. Dan geldt er dat $\|x - y\| > 0$ en dus bestaan er een $\epsilon_x, \epsilon_y > 0$ zodat $B(x, \epsilon_x)$ en $B(y, \epsilon_y)$ disjunct zijn en convex open. Uit de separatie stelling volgt nu dat er een $f \in X^*$ en $c \in \mathbb{R}$ bestaat zodat voor alle $a \in B(x, \epsilon_x)$ en $b \in B(y, \epsilon_y)$ geldt dat $f(a) < \inf_{b \in B(y, \epsilon_y)} f(b) \leq f(b)$. In het bijzonder geldt er dan dat $f(x) < c < f(y)$ en zien we dat er geldt dat $x \in f^{-1}((-\infty, c))$ en $y \in f^{-1}((c, \infty))$ tot disjuncte open verzamelingen behoren. We concluderen nu dat de zwakke topologie Hausdorff is. $\square$

Dit betekent dat limieten in de *zwakke topologie* uniek zijn. Rijtjes convergeren dus *zwak* naar unieke punten en niet naar verzamelingen met meer dan één element. Nu gaan we de *zwakke topologie* vergelijken met andere topologieën.

Definitie. De *norm topologie* op een genormeerde vectorruimte X is de topologie voortgebracht door de norm. Deze wordt voortgebracht door de open bollen $B(x, r) := \{y \in X | \|x - y\| < r\}$.

Merk op dat $x_n \to x$ in de *norm topologie* dan en slechts dan als $\|x_n - x\| \to 0$. Aangezien een norm topologie alle lineaire afbeeldingen continu maakt, is deze per definitie sterker dan de *zwakke topologie.* Het is vervolgens eenvoudig om aan te tonen dat als een rij $(x_n)_n$ convergent is in de norm topologie, dat deze dan ook zwak convergent is. Dit is een opgave voor de lezer.
Zij nu X een Banachruimte. Als laatst gaan we nog een kleine terugkoppeling maken met de eerder geintroduceerde operator $T : X \to X''$ en een toepassing van de stelling van Banach-Steinhaus, een van de fundamentele stellingen binnen de functionaalanalyse samen met de stelling van Hahn-Banach.

Stelling. Een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X *convergeert zwak* naar x. Dan is $(x_n)_n$ begrensd en $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$

Bewijs. Voor alle $f \in X'$ geldt voor $T_n \in X''$ met $T_n(f) = f(x_n)$ dat $f(x_n)$ convergeert naar $f(x)$. Er geldt dus voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat $\|T_n(f)\| = \|f(x_n)\|$ begrensd is. Uit de stelling van Banach-Steinhaus volgt nu dat er een $C > 0$ bestaat zodanig dat $\|T_n\| \leq C$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. We weten verder dat er geldt dat $\|T_n\| = \|x_n\|$. We concluderen nu dat $(x_n)_n$ begrensd is.
Er geldt dat $|f(x_n)| \leq \|f\|\|x_n\|$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en dus $|f(x)| \leq \|f\| \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$. Verder zien we dat $\|x\| = \|T_x\| = \sup_{\|f\|\neq 0} \frac{|T_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$ en dit combineren we met de vorige uitdrukking tot het gevraagde $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$. □

We zien dus dat als een rij in de *zwakke topologie* convergeert, deze begrensd is en de limiet is dan ook begrensd. Dit is weer een extra eigenschap wat zwakke convergentie eventueel interessant maakt. In het bewijs zien we nogmaals terug dat X en zijn biduale ruimte vaak gelijk behandeld kunnen worden. Dit voegt ook een extra dimensie toe aan de stelling van Banach-Steinhaus.

3 Distributies

In deze sectie wordt uitgelegd hoe de zwakke topologie toegepast wordt in de opbouw van de theorie van distributies. We geven eerst een korte introductie voor distributies.

Distributies zijn gegeneraliseerde functies en zitten in de duale ruimte van een functie ruimte. Zo'n functie ruimte heeft een naam: ruimte van test functies. Later zullen we definiëren wat continuïteit van een distributie precies betekent.

De motivatie achter het bestuderen van distributies is gebaseerd op de zogenaamde Dirac delta distributie: δ_0, met de eigenschap:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \qquad (informeel).$$

Intuïtief kunnen we δ_0 beschouwen als een (gegeneraliseerde) functie met $\delta_0(0) = +\infty$ en $\delta_0(x) = 0$ voor $x \neq 0$. Merk op: we willen integratie generaliseren tot distributies, daarbij eisen we ook dat distributies een vergelijkbare eigenschap als partiële integratie heeft, bijvoorbeeld: we eisen $\delta_0'(\varphi) = -\delta_0(\varphi')$ waarbij δ_0' de afgeleide is van δ_0 [1]. We merken op dat δ_0 niet een functie is, want anders krijgen we:

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta_0(x)\varphi(x)dx \quad \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \quad \varphi(0) \neq 0.$$

Aangezien de delta distributie geen functie blijkt te zijn, moeten we ook geen waarde toekennen aan δ_0 (vandaar hebben we het argument x in $\delta_0(x)$ weggelaten). De formele notatie van δ_0 als een distributie in de duale ruimte van test functies, ziet als volgt eruit:

$$\delta_0(\varphi) = \varphi(0).$$

We gaan eerst een ruimte van testfuncties bestuderen, omdat dit nodig is voor het definiëren van distributies. Er zijn meer ruimtes die kunnen worden beschouwen als ruimte van testfuncties bijvoorbeeld $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en de Schwartz ruimte $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$[6], maar we houden one hier alleen bezig met $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definitie. *Een test functie op $\mathbb{R}^n$ is een C^∞ functie met een compacte drager. De ruimte van test functies noteren met: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*

We eisen dat elke testfunctie $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ een compact drager heeft, zodat de integratie over φ eindig blijft (en dus voor een distributie u, $u(\varphi) < \infty$) en partiële integratie gemakkelijk toegepast kan worden (zodat $u'(\varphi) = -u(\varphi')$, waarbij de rand term 0 is)[1]. En C^∞ zorgt ervoor dat we geen zorgen hoeven te maken met de orde van differentieerbaarheid van een testfunctie.

Om de continuiteit van een distributie te definieren, moeten we eerst de topologie van $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaststellen. De convergentie in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ wordt dan ook bepaald, wanneer de topologie is gekozen. Maar we krijgen twee problemen als we hiervoor de supnorm gebruiken. Ten eerste, de (hogere orde) afgeleide van $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ worden niet gecontroleerd. Dit kan worden opgelost door een zogenaamde $C^k - norm$ te introduceren:

Definitie. *Zij $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, definieer de $C^k - norm$ door:*

$$\|\varphi\|_{C^k} := \sup_{|\alpha|\leq k, x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

waarbij α een multi index is.

Voor $n \leq k$, controleert de $C^k - norm$ alle n-de orde afgeleide van φ tegelijk. Met een rij van $C^k - normen$, $(C^k)_{k \in \mathbb{N}}$, kunnen we dan elke n-de orde afgeleide van φ controleren. Dit suggereert dat de topologie op $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ met een familie van semi-normen gedefinieerd moet worden. Maar zelfs dan hebben we nog steeds een probleem:

Voorbeeld. Zij $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ en $\varphi(0) \neq 0$. Definieer

$$\psi_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+1} \varphi^{(k)}(x-k),$$

waarbij $\varphi^{(k)}$ de k-de orde afgeleide van φ is. Merk op: $\psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ maar de limiet $\psi := \lim_{n\to\infty} \psi_n$ convergeert niet als $\|\varphi^{(k)}\|_\infty$ snel groeit. Als we eisen dat $\|\varphi\|_{C^k}$ begrensd wordt door een constante voor alle k, dan geldt:

$$\|\psi\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \|\varphi\|_{C^k} \leq C.$$

Dus de limiet bestaat. Echter ψ zit niet in $C_0^\infty(\mathbb{R})$, omdat supp ψ niet begrensd is. Om dit probleem op te lossen, eisen we verder ook de existentie van een compacte $K \subset \mathbb{R}^n$, zodat supp $\varphi_k \subset K$ voor alle k.

De eisen voor de convergentie van een rij functies (φ_j) naar φ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ zijn daarom:

1. Voor elke multi-index α convergeert de rij $(\partial^\alpha \varphi_j)$ uniform naar $(\partial^\alpha \varphi)$;
2. Er bestaat een compacte $K \subset \mathbb{R}^n$, zodat supp $\varphi_j \subset K$ voor alle j.

Dus voor een gegeven compacte K zorgt de familie van normen $\{\| \ . \ \|_{C^k} \ : \ \forall k \in \mathbb{N}_0\}$ voor de convergentie in $C^\infty(K)$.

Definitie. *Zij $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en $K \subset \mathbb{R}^n$ compact, definieer de $C^k - norm$ door:*

$$\|\varphi\|_{C^k,K} := \sup_{|\alpha| \leq k, x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

waarbij α een multi index is.

Nu kunnen we op een vergelijkbare manier een rij van compacte verzamelingen $(K_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vinden, met de eigenschap $K_k \xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{R}^n$, zodat de familie van semi-normen

$$\mathcal{N} = \{\| \ . \ \|_{C^k,K} \ : \ K \subset \mathbb{R}^n \text{ compact}, \ k \in \mathbb{N}_0\}$$

de gewenste topologie op $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ genereert voor de bovenstaande convergentie eigenschappen.

Opgave Laat zien dat $\mathcal{N}$ inderdaad een familie van semi-normen is op $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Waarom zijn de semi-normen geen echte normen op $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$?

Met behulp van de laatste stelling in sectie 1 en het feit dat $\mathbb{R}$ (met de gebruikelijke topologie) in het bijzonder een LCTVS is, zien we dat deze semi-normen een topologie genereert op $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ zodat

$$u \ : \ C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \ \to \mathbb{R}$$

is continu dan en slechts dan als u rij-continu is. Nu staan we klaar voor de definitie.

Definitie. *Een distributie u is een continue lineaire vorm op $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, waarbij de continuïteit van u gedefinieerd is als volgt:*

$$\lim_{j\to\infty} u(\varphi_j) = u(\varphi) \qquad als \qquad \lim_{j\to\infty} \varphi_j = \varphi \quad in \quad C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

De (lineaire) ruimte van distributies is genoteerd als $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Merk op: in de literatuur is $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de meeste voorkomende notatie voor de duale ruimte van $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, i.p.v. $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$.

Tenslotte definiëren we een topologie op $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Voor de duidelijkheid gebruiken we hier de notatie $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Aangezien we zo veel mogelijk distributies in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ willen behouden, leggen we alleen maar de noodzakelijke eisen op $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, namelijk, de kleinste topologie op $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ waarvoor alle $\alpha \in \mathcal{D}''(\mathbb{R}^n)$ continu zijn. Hiervoor is de zwakke topologie van toepassing; dit is de kleinste topologie op $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ zodat $\alpha \in \mathcal{D}''(\mathbb{R}^n)$ continu blijft. Merk op: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ blijkt reflexief te zijn[6], dus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}''(\mathbb{R}^n)$. Er bestaat daarom een bijectie:

$$T \,:\, \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}''(\mathbb{R}^n)$$

$$T(\varphi) := T_\varphi.$$

Merk op: vanwege deze bijectie bestaat er voor alle $\alpha \in \mathcal{D}''(\mathbb{R}^n)$ een $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, met de eigenschap $\alpha = T_\varphi$. Daarom geldt $\alpha(u) = T_\varphi(u) = u(\varphi)$ voor alle $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. De topologie op $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ is dan gekarakteriseerd door de zwakke convergentie op $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Definitie. *Zij (u_j) een rij in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ en $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. We defineren*

$$\lim_{j\to\infty} u_j = u \qquad als \qquad \lim_{j\to\infty} u_j(\varphi) = u(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Merk op: de ruimte met de zwakke topologie is Hausdorff, daarom zijn limieten eenduidig.

Distributies zijn niet alleen interessante objecten op zichzelf, maar ze spelen ook een belangrijke rol in de theorie van Fourier transformatie, het oplossen van PDE's en fractional calculus[1]. De lezer die deze theorie leuk vindt, wordt zeer aangeraden de cursus Distributie te volgen.

References

[1] J.J. Duistermaat and J.A.C. Kolk. *Distributions, Theory and Applications.* 1st ed. Birkhäuser, 2010. ISBN: 978-0-8176-4672-1.

[2] H. Hanßmann. *Functionaalanalyse.* 1st ed. Epsilon Uitgaven, Amsterdam, 2015, pp. xii+258. ISBN: 978-90-5041-152-3.

[3] D. Lecomte. *Weak topologies.* May 2006. URL: `https://perso.crans.org/lecomte/Math/WeakTopologies.pdf`.

[4] Bryan P. Rynne and Martin A. Youngsen. *Linear Functional Analysis.* 2nd ed. Springer, 2008. ISBN: 978-1-84800-004-9.

[5] T. Tao. *The strong and weak topologies.* Feb. 2009. URL: `https://terrytao.wordpress.com/2009/02/21/245b-`

[6] *Wikipedia.* URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Spaces_of_test_functions_and_distributions`.