Tentamen functionaalanalyse 1 februari 2023

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Boek(en), cursusmateriaal en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden.
- Alle deelopgaves tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Zij H een separabele Hilbertruimte met compleet orthonormaalsysteem $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $T : H \longrightarrow H$ de d.m.v.

$$\begin{aligned} Te_{4k-3} &= 2^{-k}\, e_{4k} \\ Te_{4k-2} &= -2^{-k}\, e_{4k-1} \\ Te_{4k-1} &= 2^{-k}\, e_{4k-2} \\ Te_{4k} &= -2^{-k}\, e_{4k-3} \end{aligned}$$

gedefinieerde begrensde operator.

(*i*) Geef de matrix $A_k \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ aan die T t.o.v. $\{e_{4k-3}, \ldots, e_{4k}\}$ op de door deze vectoren opgespande invariante deelruimte representeert en bereken de eigenwaarden van A_k. Is A_k diagonaliseerbaar?

(*ii*) Ga na of T een normale operator is.

(*iii*) Laat zien dat T een compacte operator is.

(*iv*) Is T zelfs een Hilbert–Schmidt operator?

2. Zij E een Banachruimte en $\emptyset \neq K \subseteq E$ een compacte deelverzameling van E. Definieer

$$\begin{aligned} |..|_K \;:\; L(E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ T &\mapsto \sup_{0\neq x\in K} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \end{aligned} \quad . \tag{1}$$

(*i*) Is het supremum in (1) in feite een maximum? Ga na dat $|..|_K$ een semi-norm op $L(E)$ definieert, d.w.z. $|..|_K$ voldoet aan alle eigenschappen in definitie 1.1 van een norm, eventueel met uitzondering van de eigenschap

$$|T|_K \;=\; 0 \quad \text{impliceert} \quad T \;=\; 0 \;. \tag{2}$$

(*ii*) Vindt een compacte deelverzameling $K \subseteq \ell^2$ waarvoor (1) een norm definieert, d.w.z. ook aan (2) voldoet. *Hint:* voor de deelverzameling

$$\left\{ \; a \in \ell^2 \;\middle|\; |a_k| \leq \frac{1}{k} \;\text{ voor alle } k \in \mathbb{N} \; \right\}$$

van ℓ^2 uit opgave 5.9 hoef je niet meer te bewijzen dat deze compact is.

(*iii*) De ε–omgevingen $U_\varepsilon(0) = \{T \in L(E) \mid |T|_K < \varepsilon\}$ leiden tot een basis $\{U_\varepsilon(S) = S + U_\varepsilon(0) \mid S \in L(E), \varepsilon > 0\}$ van de topologie τ_K op $L(E)$. Definieer

$$\tau \;:=\; \bigcup_{\substack{K \subseteq E \\ \text{compact}}} \tau_K$$

en verifieer dat convergentie van $(T_n)_n$ t.o.v. τ overeenkomt met uniforme convergentie op elke compacte verzameling.

(*bonus*) Toon aan dat τ de topologie van sterke convergentie is, d.w.z. uniforme convergentie van $(T_n)_n$ op elke compacte verzameling impliceert niet alleen puntsgewijze convergentie, maar omgekeerd is elke puntsgewijs convergente rij $(T_n)_n$ ook uniform convergent op elke compacte verzameling. We noemen τ daarom de sterke topologie.

(*v*) Bewijs dat de sterke topologie zwakker is dan de normtopologie (in de cursus Inleiding topologie werd ook 'kleiner ($\leq$) dan' gezegd) en geef een voorbeeld van een rij $(T_n)_n \in L(\ell^2)^{\mathbb{N}}$ die sterk convergent is met limiet 0 maar waarvoor $\|T_n\| = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Definieer $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ d.m.v.

$$T((a_k)_k) \;=\; \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k,\ell)\, a_k}{k\ell}\Big)_\ell$$

met een begrensde functie $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(*i*) Laat zien dat T een continue lineaire afbeelding is.

(*ii*) Bereken de Hilbert–Schmidt norm van T en concludeer dat T een compacte operator is.

(*iii*) In het geval dat $f(k,\ell) = g(k)h(\ell)$ een product is verifieer dat $(\frac{h(k)}{k})_k$ een eigenvector van T is en dat het spectrum $\sigma(T)$ uit hooguit twee punten bestaat.

(*iv*) In het geval dat $f(k,\ell) = \delta_{k,\ell+1}$ verifieer dat $(\delta_{1,k})_k$ een eigenvector van T is en dat het spectrum $\sigma(T)$ uit een enkel punt bestaat.