Hertentamen functies en reeksen 22 december 2015

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert en de naam van je werkcollegeleider: Felix Beckebanze (groep 1), Shan Shah (groep 2) of Francesco Cattafi (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 12 deelopgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ met

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{voor } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3y^3}{x^4+y^4} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \quad .$$

   (i) Bewijs dat f in de oorsprong $(x,y) = (0,0)$ in elke richting $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ richtingsdifferentieerbaar is en dat de richtingsafgeleides $D_{(u,v)}f(0,0)$ lineair van (u,v) afhangen.

   (ii) In welke punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ is f (totaal) differentieerbaar?

2. Bepaal voor elke van de volgende machtreeksen de convergentiestraal:

$$(i) \quad \sum_{k\geq 0} \frac{3^k}{k+1}\, z^k \qquad (ii) \quad \sum_{k\geq 1} \frac{z^{2k}}{4^k k^2} \quad .$$

3. Definieer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ door $f(x) = (x^2 - \pi^2)^2$ voor $x \in [-\pi, \pi[$ tot heel $\mathbb{R}$ voort te zetten tot een 2π–periodieke functie.

   (*i*) Toon aan dat de Fourierreeks uniform op $\mathbb{R}$ naar f convergeert.

   (*ii*) Bereken de Fouriercoëfficiënten van f.

4. Beschouw op $]0, \infty[\, \times\,]0, \infty[$ de functie $f(t, x) = (x + t)^{-2} \log(x + t)$.

   (*i*) Laat zien dat $t \mapsto f(t, x)$ voor alle $x > 0$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op $]0, \infty[$.

   (*ii*) Ga na dat door

$$g(x) \quad := \quad \int_0^\infty f(t, x)\, \mathrm{d}t$$

   een continue functie $g :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd.

   (*iii*) Verifieer dat de functie g differentieerbaar is en bereken de afgeleide g'.

5. Zij $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^p$ continu met de eigenschap dat

$$\lim_{x \to \infty} f(x + y) - f(x) \quad = \quad 0 \tag{1}$$

   voor alle $y \in [0, 1]$.

   (*i*) Bewijs dat de limiet (1) uniform is in $y \in [0, 1]$, d.w.z. gegeven $\varepsilon > 0$ bestaat er een $M > 0$ met $\|f(x + y) - f(x)\| < \varepsilon$ voor alle $y \in [0, 1]$ en alle $x > M$. *Hint:* redeneer uit het ongerijmde.

   (*ii*) Concludeer dat $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t - f(x) \;=\; 0.$

   (*iii*) Toon aan dat $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$