Functies en reeksen 2015

Extra opgaven

Opgave A

Laat zien dat

$$\|A\| \quad := \quad \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

een norm definieert op de ruimte $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ van lineaire afbeeldingen en dat voor alle $v \in \mathbb{R}^n$ geldt dat $\|Av\| \leq \|A\| \, \|v\|$. *Hint:* ga eerst na dat

$$\|A\| \quad = \quad \sup_{\|v\|=1} \|Av\| \ .$$

Opgave B

Zij $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ een open interval. Toon aan dat voor $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de volgende uitspraken over het gedrag van f in $\xi \in I$ equivalent zijn.

1. De limiet
$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$
bestaat.

2. Er bestaat een $m \in \mathbb{R}$ met de eigenschap dat de functie $\rho : \mathbb{R} \supset\!\!\longrightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door
$$\rho(h) \quad = \quad f(\xi + h) \ - \ f(\xi) \ - \ hm$$
voldoet aan
$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\rho(h)\|}{|h|} \quad = \quad 0 \ .$$

3. Er bestaat een functie $L : I \longrightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die continu is in het punt ξ en waarvoor
$$f(x) \quad = \quad f(\xi) \ + \ L(x) \cdot (x - \xi)$$
voor alle $x \in I$.

Wat is het preciese verband tussen $m \in \mathbb{R}$, $L(\xi) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en de afgeleide van f in ξ ?

Opgave C

We beschouwen een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in een metrische ruimte (V, d). Onder een **limietpunt** van de rij verstaan we een getal $a \in \mathbb{N}$ met de eigenschap dat voor iedere $\varepsilon > 0$ en $N \in \mathbb{N}$ een $n \geq N$ bestaat zo dat $a_n \in B(a; \varepsilon)$. Toon aan dat de volgende beweringen gelijkwaardig zijn, voor elke $a \in V$.

(a) Er bestaat een deelrij $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ met $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

(b) Het punt a is een limietpunt van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Opgave D

Gegeven is een begrensde rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. We definiëren een nieuwe rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ door

$$b_n := \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} = \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

(a) Bespreek waarom dit een correcte definitie is.

(b) Toon aan dat de rij (b_n) monotoon dalend is.

(c) Toon aan dat de rij (b_n) convergent is.

De limiet van de rij (b_n) wordt ook wel genoteerd met

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

In het vervolg schrijven we $\lambda := \limsup_{n\to\infty} a_n$.

(d) Zij $\varepsilon > 0$. Toon aan dat er voor elke $N \in \mathbb{N}$ een $n \geq N$ bestaat zo dat $b_n - \varepsilon < \lambda \leq b_n$. Toon aan dat hierbij een $k \geq n$ bestaat zo dat $b_n - \varepsilon < a_k \leq b_n$.

(e) Toon aan dat λ een limietpunt is van de rij (a_n).

(f) Zij μ een limietpunt van de rij (a_n). Zij $\varepsilon > 0$. Toon aan dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $b_N < \lambda + \frac{1}{2}\varepsilon$. Toon aan dat hierbij een $k \geq N$ bestaat zo dat $\mu < a_k + \frac{1}{2}\varepsilon$. Toon aan dat $\mu \leq \lambda + \varepsilon$. Bewijs dat $\mu \leq \lambda$.

Zij L de verzameling limietpunten van de rij (a_n).

(g) Toon aan dat $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max L$.

(h) Definieer en bespreek een vergelijkbare limiet $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$. Merk in het bijzonder op dat $\liminf_{n\to\infty} a_n = \min L$.

Opgave E

Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oneven en 2π–periodiek. Bewijs dat $f(k\pi) = 0$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

Opgave F

Zet de op $[-\pi, \pi]$ gedefinieerde functie $f(x) = \frac{1}{8}\pi x(\pi - |x|)$ 2π–periodiek voort naar heel $\mathbb{R}$ en ga na dat de zo gedefinieerde functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is. Bereken de Fouriercoëfficiënten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ van f.

Opgave G

Een functie $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ is een trigonometrische veelterm als

$$f(t) \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_k t}$$

met $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$ en $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$. Verifieer dat

$$\langle f \mid g \rangle \quad := \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

een inproduct op de ruimte F van alle trigonometrische veeltermen definieert en dat de functies $e_\mu(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}$ een (overaftelbaar) orthonormaalsysteem $(e_\mu)_{\mu\in\mathbb{R}}$ vormen.

Opgave H

Zij $-1 < q < 1$ en $p > 0$. Toon aan dat de Keplerse vergelijking $E - q\sin E = p$ een unieke oplossing E heeft en approximeer deze d.m.v. de contractiestelling (uit Inleiding Analyse). *Hint:* definieer $E_0 = p$ en recursief $E_{n+1} = q\sin E_n + p$. Men kan bewijzen dat de oplossing $E = E(p, q)$ willekeurig vaak differentieerbaar van (p, q) afhangt.

Opgave I

Schrijf $\psi(p, q)$ voor de in opgave H verkregen oplossing van de Keplerse vergelijking $\psi(p, q) = p + q\sin\psi(p, q)$ en bewijs dat de eenduidigheid impliceert dat $\psi(p + 2\pi, q) = \psi(p, q) + 2\pi$ en dat $\psi(-p, q) = -\psi(p, q)$. Hieruit volgt dat de functie $p \mapsto f(p, q) := \psi(p, q) - p$ 2π–periodiek en oneven in p is. Bewijs dat

$$\psi(p, q) \quad = \quad p \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k(q)\sin kp$$

waarin de Fouriercoëfficiënten

$$b_k(q) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p, q)\sin(kp)\,\mathrm{d}p \tag{1}$$

snel afnemend zijn, in de zin dat er voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een constante $C = C(n, q)$ is met de eigenschap dat $|b_k(q)| \le Ck^{-n}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

Het probleem is dat de integraal (1) gedefinieerd is in termen van de functie $\psi(p, q) = p + f(p, q)$, die niet expliciet bekend is. Pas partiële integratie toe (en gebruik de Keplerse vergelijking) om dit te verbeteren.