Tentamen functies en reeksen 5 november 2015

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert en de naam van je werkcollegeleider: Felix Beckebanze (groep 1), Shan Shah (groep 2) of Francesco Cattafi (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- In dit tentamen is $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$.
- Alle 13 deelopgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Gegeven zijn $f, g, h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ door middel van

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \big(xy, \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2)\big) \\ g(u,v) &= (\mathrm{e}^v \cos u, \mathrm{e}^v \sin u) \end{aligned}$$

en $h = g \circ f$.

   (*i*) Ga na dat f, g, h (totaal) differentieerbaar zijn en bereken de afgeleides $Df(x,y)$, $Dg(u,v)$ en $Dh(x,y)$.

   (*ii*) Controleer welke van de f, g, h kan worden opgevat als complex differentieerbare functie $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

2. Beschouw de Fourierreeks van de functie $f(x) = \frac{\pi}{4}|\sin x|$.

   (*i*) Toon aan dat de Fourierreeks puntsgewijs naar f convergeert.

   (*ii*) Bereken de Fouriercoëfficiënten van f.

   (*iii*) Bewijs dat de Fourierreeks uniform op $\mathbb{R}$ naar f convergeert.

   Hint: gebruik stellingen (ga na dat aan de voorwaarden is voldaan!) die in het college (of dictaat) zijn bewezen.

3. Zij $p \in \mathbb{R}[x]$ een reële veelterm van graad $\deg p \leq 5$. Definieer d.m.v.

$$f_n(x) \quad := \quad \int_0^n \mathrm{e}^{-t} p(x-t)\,\mathrm{d}t$$

een rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ van functies op $\mathbb{R}$.

   (i) Laat zien dat elke functie f_n continu is op $\mathbb{R}$ en dat de rij $(f_n)_n$ op elk begrensd interval $I \subseteq \mathbb{R}$ uniform convergent is.

   (ii) Ga na dat $(f_n)_n$ op $\mathbb{R}$ puntsgewijs convergent is en dat de limietfunctie $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ continu is op $\mathbb{R}$.

   (iii) Bewijs dat g differentieerbaar is op $\mathbb{R}$.

   (iv) Toon aan dat g willekeurig vaak differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en bereken de 6-de afgeleide. Wat voor soort functie ís g eigenlijk?

4. Tijdens het werkcollege werd aangetoond dat voor een differentieerbare functie $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, geldt dat

$$|f(b) \; - \; f(a)| \quad \leq \quad \sup_{x\in[a,b]} \|\operatorname{grad} f(x)\| \cdot \|b-a\|$$

waarbij $[a,b] \subseteq U$ het lijnstuk van a naar b.

   (i) Zij $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open, differentieerbaar en $a \neq b$ met $[a,b] \subseteq U$. Laat zien dat

$$\frac{\|h(b) - h(a) \; - \; Dh(\xi)\cdot(b-a)\|}{\|b-a\|} \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{p} \sup_{x\in[a,b]} \|\operatorname{grad} h_i(x) - \operatorname{grad} h_i(\xi)\|$$

   voor alle $\xi \in [a,b]$. *Hint:* beschouw $g(x) := h(x) - Dh(\xi)\cdot x$.

   (ii) Definieer $g :]{-1},1[\longrightarrow \mathbb{C}$ d.m.v. $g(t) = 0$ voor alle $-1 < t \leq 0$ en $g(t) = t^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}/t}$ voor alle $0 < t < 1$. Ga na dat g op $]{-1},1[$ differentieerbaar is en dat het beeld

$$\left\{ g'(t) \in \mathbb{C} \;\middle|\; -1 < t < 1 \right\}$$

   niet boogsamenhangend is. Concludeer dat g' op $]{-1},1[$ niet continu is en ook dat er geen middelwaardestelling kan zijn van de vorm 'er bestaat een $t \in]a,b[$ met $g(b) - g(a) = g'(t)\cdot(b-a)$ voor gegeven $a,b \in]{-1},1[$'.

   (iii) Zij $U \subseteq \mathbb{R}^n$ open en convex, $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ differentieerbaar en de afgeleide $Dh : U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ een begrensde afbeelding. Toon aan dat er een constante $C > 0$ bestaat met de eigenschap, dat voor alle $a,b \in U$ geldt dat $\|h(b)-h(a)\| \leq C\cdot\|b-a\|$.

   (iv) Zij $h \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ met $h(0) = 0$ en de eigenschap, dat alle tweede partiële afgeleides in alle punten nul zijn, ofwel $D^2h = 0$. Bewijs dat h lineair is.