Hertentamen functies en reeksen 3 jamuari 2019

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, je studentnummer en op de eerste pagina ook het aantal vellen dat je inlevert en de naam van je werkcollegeleider: Dominik Engl (groep 1), Davide Alboresi (groep 2) of Lasse Grimmelt (groep 3).
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. In het bijzonder, als je een stelling gebruikt moet je ook laten zien dat aan de voorwaarden is voldaan.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel in het vervolg uiteraard wel gebruiken.
- Alle 14 deelopgaven tellen even zwaar.
- Boeken, cursusmateriaal (ook van andere cursussen) en aantekeningen mogen gebruikt worden, electronische apparaten mogen niet gebruikt worden.
- *SUCCES!*

1. Bepaal voor elke van de volgende machtreeksen de convergentiestraal:

$$(i) \quad \sum_{k\geq 1} \frac{1-(-1)^k}{2k}\, z^k \qquad (ii) \quad \sum_{k\geq 1} \left(\frac{z}{k}\right)^k \quad .$$

2. Beschouw de functie $f(t,x) = \frac{x}{\cos(xt)}$ op $[0,1]\times[0,1] \ \subseteq \ \mathbb{R}^2$.

   (i) Ga na dat door

   $$g(x) \quad := \quad \int_0^1 f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

   een continue functie $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd.

   (ii) Verifieer dat de functie g differentieerbaar is met afgeleide $g'(x) = \frac{1}{\cos x}$.

3. Definieer de rij van functies $f_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ door $f_k(z) := \mathrm{e}^{-k|z|^2}$ en beschouw de reeks

$$\sum_{k\geq 0} f_k \quad . \tag{1}$$

(*i*) In welke punten $z \in \mathbb{C}$ is (1) puntsgewijs convergent? Wat is de limietfunctie g ? (Herinnering: laat duidelijk zien hoe je aan je antwoord komt.)

(*ii*) Geef de deelverzamelingen $D \subseteq \mathbb{C}$ waarop (1) uniform naar g convergeert.

4. Gegeven zijn de functies $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ met

$$f(x,y) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{voor } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

en

$$g(x,y) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{voor } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{voor } (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \quad .$$

(*i*) Bereken voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de Jacobi-matrix $J_f(x,y)$ en ga na dat $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} J_f(x,y) \neq J_f(0,0)$.

(*ii*) In welke punten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ is f (totaal) differentieerbaar?

(*iii*) Bereken voor alle $(x,y) \neq (0,0)$ de Jacobi-matrix $J_g(x,y)$ en laat zien dat g op $\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$ (totaal) differentieerbaar is.

(*iv*) In welke $z \in \mathbb{C}$ is $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeven door $h(x + \mathrm{i}y) := f(x,y) + \mathrm{i}g(x,y)$ complex differentieerbaar?

5. Voor $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $a < b \in \mathbb{R}$ is de uitspraak van het Lemma van Riemann–Lebesgue dat

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}x \quad = \quad 0 \quad . \tag{2}$$

In het diktaat is (2) bewezen voor f continu (en zelfs voor f stuksgewijs continu).

(*i*) Laat (2) zien voor f Riemann-integreerbaar. *Hint:* gebruik Lemma 6.22.

(*ii*) Zij $g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbaar en $|g|$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar op $]a,b[$. Gegeven $\varepsilon > 0$, construeer een (gewoon) Riemann-integreerbare $h :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ met $\|g - h\|_1 < \varepsilon$, waarbij $\|..\|_1$ de integraalnorm

$$\|f\|_1 \quad = \quad \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad .$$

(*iii*) Zij $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{C}$ lokaal Riemann-integreerbaar, d.w.z. de restricties $f : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{C}$ zijn voor alle $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ Riemann-integreerbaar, en $|f|$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar op $]a,b[$. Ga na dat $g(x) := \operatorname{Re} f(x)$ en $h(x) := \operatorname{Im} f(x)$ oneigenlijk Riemann-integreerbare functies $g, h :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ definiëren.

(*iv*) Toon aan dat (2) geldt onder de voorwaarden in (*iii*).