Katznelson tegenvoorbeeld

Rein Janssen Groesbeek en Stan Wever

1 Inleiding

We gaan een functie $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ construeren waarvoor de Fourier-reeks divergent is op rationale veelvouden van 2π, dus op een dichte deelverzameling van $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

De functie die we gaan construeren is

$$f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t) \quad \text{met } \lambda_n := n! \cdot 2^{3^n} \text{ en } \varphi_n \text{ hulpfuncties.} \tag{1}$$

Het idee van de constructie is om eerst een rij van Fourier-polynoom hulpfuncties φ_n te construeren die uniform kleiner dan 1 zijn en de Fourier-reeks van φ_n divergeert in 0. Dan kunnen we deze rij van hulpfuncties sommeren tot een uniform convergente reeks via de schaalfactor $\frac{1}{n^2}$ en omdat φ_n Fourier-polynomen zijn, is $\varphi_n \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en de som f is dan ook een 2π-periodieke en continue functie. Vervolgens gaan we de periodes van de hulpfuncties verkleinen naarmate de sommatieindex groter wordt door in plaats van $t \mapsto \varphi_n(t)$ functies, de functies $t \mapsto \varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t)$ te sommeren, dus met een schaalfactor in het argument die zeer snel groter wordt met de sommatie-index. Hierdoor worden de periodes van de hulpfuncties in de reeks willekeurig klein naarmate de sommatie-index groter wordt, en omdat de hulpfuncties divergeren in 0 en in elk veelvoud van hun periode, kunnen de punten waar de functie divergeert willekeurig dichtbij een willekeurig maar vast punt $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ komen.

De hulpfuncties φ_n zijn Fourier-polynomen van orde n^2 dus we kunnen schrijven

$$\varphi_n(t) = \sum_{m=-n^2}^{n^2} \widehat{\varphi}_n(m) e^{imt}. \tag{2}$$

Als we kijken naar de functies $t \mapsto \varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t)$ in de sommatie van f, dan zien we dat door de schaalfactor λ_n in het argument het Fourier-polynoom lacunair is gemaakt, wat betekent dat er gaten in de coefficienten van de exponentiele machtreeks ontstaan. We krijgen dus

$$\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t) = \sum_{m=-\lambda_n^2}^{\lambda_n^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_n}(m) e^{i\lambda_n m t}. \tag{3}$$

en voor een willekeurige index m in de sommatie, zijn de Fourier-coëfficiënten tussen $\lambda_n m$ en $\lambda_n(m+1)$ allemaal nul. Dus f is een sommatie van lacunaire Fourier-polynomen waarbij de gaten zeer snel groot worden door de dubbel-exponentiele stijging van λ_n. De Fourier-polynomen kunnen niet elkaars gaten in de Fourier-reeks vullen dus f wordt ook een lacunaire goniometrische reeks. Dit geeft al het vermoeden dat f een grillige grafiek zal hebben.

Voordat we beginnen met het bewijs verwijzen naar de appendix voor de definities van gebruikte begrippen en notaties en het bewijs van twee technische lemma's over de Dirichlet-kern en de Féjer-kern.

2 Divergentie van de Fourier-reeks van f

We nemen in de volgende stelling aan dat we de hulpfuncties φ_n die voldoen aan onze benodigde eigenschappen al geconstrueerd hebben. In paragraaf 3 laten we zien waarom deze φ_n bestaan.

In de stelling leggen we drie voorwaarden op op onze hulpfuncties φ_n.

1. We willen dat de φ_n uniform kleiner zijn dan 1, zodat we een (absoluut) uniform convergente reeks krijgen en daarmee de continuiteit van de φ_n kunnen overbrengen tot continuiteit van de f functie.

2. We willen dat φ_n Fourier-polynomen zijn, zodat hun Fourier-reeks eindig is. Hiermee kunnen we de sommatie in f op een bepaald punt b splitsen, en de sommatietermen onder b en boven b apart beschouwen. Er zijn eindig veel termen onder b en omdat het allemaal Fourier-polynomen zijn, is de Fourier-reeks van de termen onder b ook eindig dus heeft dit deel geen invloed op de convergentie van de Fourier-reeks van f waardoor we alleen naar de termen boven b hoeven te kijken. Hiermee voorkomen we bijvoorbeeld het probleem dat zou kunnen ontstaan als alle termen boven b naar ∞ divergeren en de termen onder b naar $-\infty$ zodanig dat de totale reeks uiteindelijk weer wél convergeert.

3. We willen dat de n-de partiële Fourier-reeks in 0 van een hulpfunctie φ_n logaritmisch divergeert met n. Hiermee kunnen we voor elke $M > 0$ een voldoende grote index i kiezen in de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t)$ zodat het element $\frac{1}{i^2}\varphi_{\lambda_i}(\lambda_i t)$ een i-de partiële Fourier-reeks heeft die groter is dan M. Als we dan de i-de partiële Fourier-reeksen van alle termen in de sommatie met index groter dan i en kleiner dan i kunnen afschatten op een constante zodat ze niet invloed kunnen hebben op de divergentie van de Fourier-reeks van f, dan kunnen we de i-de partiële Fourier-reeks van f ook groter krijgen dan M.

   We willen dat de divergentie logaritmisch is omdat dit ervoor zorgt dat de λ_n-de partiële Fourier-reeks in 0 van φ_{λ_n} dan met $\log \lambda_n$ divergeert, en omdat λ_n dubbel exponentieel stijgend is, zal $\log \lambda_n$ exponentieel stijgen en wordt niet tegengehouden door de factor $\frac{1}{n^2}$ die we nodig hadden om f uniform te laten convergeren.

Deze drie ideeën werken we uit in het volgende bewijs.

Stelling 1. *Zij $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van Fourier-polynomen waarbij voor $n \in \mathbb{N} : \varphi_n$ orde n^2 heeft. Verder als ze voor elke $n \in \mathbb{N}$ voldoen aan*

(a) $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$

(b) $|S_n(\varphi_n, 0)| > \frac{1}{10}\log n - 2$

dan is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}$ met $\lambda_n := n!2^{3^n}$ absoluut uniform convergent en de functie

$$f(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t) \tag{4}$$

continu met een Fourier-reeks die divergeert in elk rationaal veelvoud van 2π.

Bewijs. We kunnen de partiële reeks $\sum_{n=1}^{m} \|\frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}\|_\infty$ afschatten op $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}$ vanwege voorwaarde (a). De reeks $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}$ is de ondersom van de integraal

$$\sum_{n=1}^{m} \|\frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^m \frac{1}{x^2}\,dx = 1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^m = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2. \tag{5}$$

Dus doordat we een stijgende reeks hebben die van boven door 2 begrensd is, volgt uit volledigheid van $\mathbb{R}$ de absolute uniforme convergentie, die weer op zijn beurt uniforme convergentie impliceert. Dus f van vergelijking (4) is gedefinieerd op heel $\mathbb{R}$. De elementen van de rij van functies $\{t \mapsto \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2}\varphi_n(\lambda_j t)\}_{m\in\mathbb{N}}$ zijn eindige sommen van composities van continue functies, dus zelf zijn ze ook continu en omdat deze rij uniform convergeert, is de limiet ook continu, waarbij de limiet de functie f van vergelijking (4) is.

We merken op dat voor iedere $j \in \mathbb{N}$ is φ_{λ_j} een Fourier-polynoom van orde λ_j^2, dus

$$\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t) = \sum_{m=-\lambda_j^2}^{\lambda_j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(m)e^{im\lambda_j t}. \tag{6}$$

Zij $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ vast maar willekeurig. Zonder verlies van algemeenheid nemen we aan dat $b \geq 1$. We gaan bewijzen dat de Fourier-reeks van f divergeert in $2\pi\frac{a}{b}$. We kunnen f schrijven als

$$f(t) = \sum_{j=1}^{b-1} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t) + \sum_{j=b}^{\infty} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t). \tag{7}$$

Het linkerdeel is een Fourier-polynoom, dus de Fourier-reeks hiervan is een eindige som en dus convergent in $\frac{a}{b}2\pi$. We kijken naar de partiële Fouriersommen $S_{\lambda_n^2}$ van het rechterdeel. Voor $n \geq b$ geldt

$$\begin{aligned} |S_{\lambda_n^2}(t \mapsto \sum_{j=b}^{\infty} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t), \frac{2\pi a}{b})| = |S_{\lambda_n^2}(t \mapsto \sum_{j=b}^{n-1} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t), \frac{2\pi a}{b}) + S_{\lambda_n^2}(t \mapsto \frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t), \frac{2\pi a}{b}) \\ + S_{\lambda_n^2}(t \mapsto \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t), \frac{2\pi a}{b})| \end{aligned} \tag{8}$$

uit de lineariteit van de $S_{\lambda_n^2}$ operator volgens Lemma 3 in de Appendix. We bekijken nu deze drie termen.

Voor de eerste term geldt vanwege vergelijking (6)

$$\sum_{j=b}^{n-1} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t) = \sum_{j=b}^{n-1} \frac{1}{j^2} \sum_{m=-\lambda_j^2}^{\lambda_j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(m)e^{im\lambda_j t}. \tag{9}$$

We gebruiken het volgende technische lemma:

Lemma 1. *Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt $\lambda_n^2 = (n!)^2 \left(2^{3^n}\right)^2 < (n+1)!2^{3^{n+1}} = \lambda_{n+1}$.*

Bewijs. We bewijzen eerst met inductie dat $n! < 2^{3^n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voor $n = 0$ krijgen we $0! = 1 < 2 = 2^{3^0}$. Als we het bewezen hebben voor $n = k$ dan krijgen we voor $n = k+1$: $(k+1)! = k \cdot k! < k \cdot 2^{3^k}$ en omdat voor iedere $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $k \leq 2^{3^k}$, krijgen we $k \cdot 2^{3^k} \leq \left(2^{3^k}\right)^2 \leq 2^{3^{k+1}}$, dit voltooit de inductiestap.

Nu geldt er dat $n! < 2^{3^n}$ en $n! \leq (n+1)!$ dus $(n!)^2 \leq (n+1)!2^{3^n}$ oftewel $(n!)^2 \left(2^{3^n}\right)^2 < (n+1)!2^{3^{n+1}}$. □

Merk nu op dat voor $b \leq j \leq n-1$, door de stijgendheid van de rij $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ geldt voor elke $|m| \leq \lambda_j^2 \leq \lambda_{n-1}^2$ dat $|m\lambda_j| \leq \lambda_{n-1}^3 < \lambda_n^2$ door Lemma 1. Dit betekent dus dat alle coëfficiënten in de e-macht van vergelijking (9) kleiner zijn dan de grenzen van de partiële sommatie $S_{\lambda_n^2}$, oftewel alle coëfficiënten van de sommen van de Fourier-polynomen φ_{λ_j} worden meegenomen in de sommatie van $S_{\lambda_n^2}$. Verder als $j \geq b$ dan geldt $b \mid \lambda_j$ want $b \mid j!$. Dit betekent dat $\lambda_j \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ waardoor voor $t = \frac{2\pi a}{b}$ de e-macht in vergelijking (9) 1 wordt, dus $\exp(im\lambda_j \frac{2\pi a}{b}) = \exp(im0) = 1$. Dit betekent dat we kunnen schrijven

$$S_{\lambda_n^2}\left(t \mapsto \sum_{j=b}^{n-1} \frac{1}{j^2} \sum_{m=-\lambda_j^2}^{\lambda_j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(m) e^{im\lambda_j t}, \frac{2\pi a}{b}\right) = \sum_{j=b}^{n-1} \frac{1}{j^2} \sum_{m=-\lambda_j^2}^{\lambda_j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(m) e^0 = \sum_{j=b}^{n-1} \frac{1}{j^2} \varphi_{\lambda_j}(0) \quad (10)$$

waarbij we in de laatste gelijkheid weer vergelijking (6) gebruiken.

Merk nu op dat voor $j \geq n+1$, door de stijgendheid van de rij $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, geldt voor elke $|m| \geq 1$ dat $|m|\lambda_j \geq \lambda_j \geq \lambda_{n+1} > \lambda_n^2$ door Lemma 1. Dit betekent dat alle termen met $|m| \geq 1$ zorgen voor een exponent van de e-macht die buiten de sommatiegrenzen van $S_{\lambda_n^2}$ valt. Dus alleen de term $m = 0$ blijft over. Dit betekent

$$S_{\lambda_n^2}\left(t \mapsto \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sum_{m=-\lambda_j^2}^{\lambda_j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(m) e^{im\lambda_j t}, \frac{2\pi a}{b}\right) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0) e^{i0\lambda_j \frac{2\pi a}{b}} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0). \quad (11)$$

Tenslotte geldt voor de middelste term

$$S_{\lambda_n^2}\left(\frac{1}{n^2}\varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t), \frac{2\pi a}{b}\right) = S_{\lambda_n^2}\left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=-\lambda_j^2}^{\lambda_j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(m) e^{im\lambda_j t}, \frac{2\pi a}{b}\right) \quad (12)$$

dat $|m\lambda_n| \leq \lambda_n^2$ slechts dan als $|m| \leq \lambda_n$, oftewel de termen van $\lambda_n + 1$ tot λ_n^2 worden niet meegenomen in de sommatie, waardoor we krijgen

$$\begin{aligned} S_{\lambda_n^2}\left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=-\lambda_j^2}^{\lambda_j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(m) e^{im\lambda_j t}, \frac{2\pi a}{b}\right) &= S_{\lambda_n^2}\left(\frac{1}{n^2} \sum_{m=-\lambda_j}^{\lambda_j} \widehat{\varphi}_{\lambda_n}(m) e^{im\lambda_n t}, \frac{2\pi a}{b}\right) \\ = \frac{1}{n^2} \sum_{m=-\lambda_j}^{\lambda_j} \widehat{\varphi}_{\lambda_n}(m) e^{im\lambda_n \frac{2\pi a}{b}} &= \frac{1}{n^2} \sum_{m=-\lambda_j}^{\lambda_j} \widehat{\varphi}_{\lambda_n}(m) e^0 = \frac{1}{n^2} S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}, 0) \end{aligned} \quad (13)$$

waarbij de exponent in de e-macht 0 wordt omdat $n \geq b$ dus $b \mid \lambda_n$. Dus als we vergelijkingen (10), (11), (13) invullen in (8) krijgen we

$$\begin{aligned} |S_{\lambda_n^2}(t \mapsto \sum_{j=b}^{\infty} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t), \frac{2\pi a}{b})| &= |\sum_{j=b}^{n-1} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(0) + \frac{1}{n^2} S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}, 0) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0)| \\ &\geq |\frac{1}{n^2} S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}, 0)| - |\sum_{j=b}^{n-1} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(0) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0)| \end{aligned} \quad (14)$$

en omdat

$$|\sum_{j=b}^{n-1} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(0) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0)| \leq \sum_{j=b}^{n-1} \frac{1}{j^2}|\varphi_{\lambda_j}(0)| + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}|\widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < 2 \quad (15)$$

waarbij we gebruiken $|\widehat{\varphi}_n(0)| \leq \|\varphi_n\|_1 \leq \|\varphi_n\|_\infty \leq 1$ en $|\varphi_n(0)| \leq \|\varphi_n\|_\infty \leq 1$ voor elke $n \in \mathbb{N}$ (voorwaarde (a)). Dus samen met voorwaarde (b) geldt er dat

$$\begin{aligned}
|S_{\lambda_n^2}(t \mapsto \sum_{j=b}^{\infty} \frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t), \frac{2\pi a}{b})| &\geq |\frac{1}{n^2}S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}, 0)| - |\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j^2}\varphi_{\lambda_j}(0) + \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0)| \\
> \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{10}\log\lambda_n - 2\right) - 2 &= \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{10}\log(n!2^{3^n}) - 2\right) - 2 \geq \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{10}\log 2^{3^n} - 2\right) - 2 \\
&= \frac{(\log 2)3^n}{10n^2} - \frac{2}{10n^2} - 2
\end{aligned} \tag{16}$$

en omdat een exponentiële functie harder stijgt dan een polynomiale functie, krijgen we dat de laatste term divergeert voor $n \to \infty$, oftewel voor willekeurig grote $M > 0$ kunnen we een $n \geq b$ vinden zodat de Fourier-reeks groter is dan M in absolute waarde.

Als we terugkijken naar vergelijking (7) dan zien we dat de Fourier-reeks van f de som is van de Fourier-reeks van het linkerdeel met de Fourier-reeks van het rechterdeel omdat de S_n operator lineair is (Lemma 3) en we dus de twee Fourier-reeksen apart kunnen uitrekenen. De Fourier-reeks van het linkerdeel convergeert in $2\pi\frac{a}{b}$ want het is een Fourier-polynoom dus een eindige som terwijl de Fourier-reeks van het rechterdeel divergeert in $2\pi\frac{a}{b}$, dus de Fourier-reeks van f divergeert ook in $2\pi\frac{a}{b}$. Omdat dit punt willekeurig gekozen is, divergeert de Fourier-reeks van f in elk rationaal veelvoud van 2π. ☐

3 Constructie van de hulpfuncties φ_n

We laten nu zien hoe hulpfuncties φ_n geconstrueerd kunnen worden. We definiëren $\varphi_n = F_{n^2} * \psi_n$ als de convolutie van de Féjer-kern van orde n^2 met een andere hulpfunctie ψ_n. We construeren ψ_n als een Riemann-integreerbare en 2π-periodieke functie met de eigenschap dat de n-de partiële Fourier-reeks van ψ_n groter is dan de integraalnorm van de n-de Dirichlet-kern. Op deze manier krijgen we via de convolutie met de Féjer-kern een Fourier-polynoom van orde n^2 waarvan de n-de partiële Fourier-reeks harder dan $\log n$ stijgt als $n \to \infty$ (vanwege Lemma 4). De exacte constructie van ψ_n geven we in paragraaf 3.1.

Lemma 2. *Zij $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van 2π-periodieke, Riemann-integreerbare functies die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:*

(1) $\|\psi_n\|_\infty \leq 1$

(2) $|S_n(\psi_n, 0)| > \frac{1}{2}\|D_n\|_1$

Dan is de convolutie $\varphi_n := F_{n^2} * \psi_n$ een Fourier-polynoom van orde n^2 die voldoet aan

(a) $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$

(b) $|S_n(\varphi_n, 0)| > \frac{1}{2}\|D_n\|_1 - 2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\log n - 2.$

Bewijs. De definitie van φ_n is

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) = F_{n^2} * \psi_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_{n^2}(x-t)\psi_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=-n^2}^{n^2}\left(1 - \frac{|j|}{n^2+1}\right)e^{ij(x-t)}\psi_n(t)\,dt \\
&= \sum_{j=-n^2}^{n^2}\left(1 - \frac{|j|}{n^2+1}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_n(t)e^{-ijt}\,dt \cdot e^{ijx} = \sum_{j=-n^2}^{n^2}\left(1 - \frac{|j|}{n^2+1}\right)\widehat{\psi}_n(j) \cdot e^{ijx}.
\end{aligned} \tag{17}$$

In de laatste term is φ_n geschreven als een orde n^2 Fourier-polynoom. De integraal $\int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(t)e^{-ijt}\,dt$ bestaat omdat ψ_n Riemann-integreerbaar is.

We gaan voorwaarde (a) na. We weten dat voor elke $x \in \mathbb{R}$

$$|F_{n^2} * \psi_n(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{n^2}(t)\psi_n(x-t)\,dt \right| \leq \|\psi_n\|_\infty \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_{n^2}(t)|\,dt. \tag{18}$$

Lemma 5 geeft ons $|F_{n^2}(t)| = F_{n^2}(t)$ dus we kunnen de absoluut waarde strepen weghalen in de integraal van vergelijking (18).

$$\begin{aligned} &= \|\psi_n\|_\infty \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{n^2}(t)\,dt = \|\psi_n\|_\infty \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-n^2}^{n^2} \left(1 - \frac{|j|}{n^2+1}\right) e^{ijt}\,dt \\ &= \|\psi_n\|_\infty \frac{2\pi}{2\pi} \left(1 - \frac{|0|}{n^2+1}\right) = \|\psi_n\|_\infty \leq 1 \end{aligned} \tag{19}$$

vanwege voorwaarde (1) voor ψ_n. Dit betekent dat $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{n^2} * \psi_n(x)| \leq 1$ dus $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$. We gaan voorwaarde (b) na. We weten dat

$$|S_n(\varphi_n, 0)| = |S_n(\varphi_n, 0) - S_n(\psi_n, 0) + S_n(\psi_n, 0)| \geq |S_n(\psi_n, 0)| - |S_n(\varphi_n, 0) - S_n(\psi_n, 0)|. \tag{20}$$

Verder weten we dat

$$|S_n(\varphi_n, 0) - S_n(\psi_n, 0)| = |\sum_{j=-n}^{n} \left(\widehat{\varphi}_n(j) - \widehat{\psi}_n(j)\right)| \tag{21}$$

en gebruikmakend van de identiteit $\widehat{\varphi}_n(j) = \left(1 - \frac{|j|}{n^2+1}\right) \widehat{\psi}_n(j)$ krijgen we

$$= |\sum_{j=-n}^{n} -\frac{|j|\widehat{\psi}_n(j)}{n^2+1}| \leq 2\sum_{j=1}^{n} \frac{j\|\psi_n\|_\infty}{n^2+1} \leq \frac{(n+1)n}{n^2+1} = 1 + \frac{n-1}{n^2+1} < 2. \tag{22}$$

Als we deze afschatting gebruiken in vergelijking (20) dan krijgen we samen met de gegeven voorwaarde (2) voor ψ_n dat:

$$|S_n(\varphi_n, 0)| \geq |S_n(\psi_n, 0)| - |S_n(\varphi_n, 0) - S_n(\psi_n, 0)| > |S_n(\psi_n, 0)| - 2 > \frac{1}{2}\|D_n\|_1 - 2. \tag{23}$$

Met Lemma 4 volgt dan $\frac{1}{2}\|D_n\|_1 - 2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \log n - 2$. □

3.1 Constructie van de hulpfuncties ψ_n

Tenslotte laten we zien hoe we hulpfuncties ψ_n kunnen construeren met voorwaarden die voldoen aan Lemma 2. Voor $n \in \mathbb{N}$, definieer $\psi_n(t) := \operatorname{sgn}(D_n(t))$, oftewel het teken van de Dirichlet-kern. We zien uit deze definitie dat $|\psi_n(x)| \leq 1$ voor elke $x \in [-\pi, \pi]$, dus $\|\psi_n\|_\infty \leq 1$. De Dirichlet-kern D_n heeft $2n$ nulpunten op $[-\pi, \pi]$, namelijk op de punten $t = \frac{\pi k}{n+\frac{1}{2}}$ voor $1 \leq k \leq n$ en $-n \leq k \leq -1$, dit is evident aan de identiteit $D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ voor $t \neq 0$. Uit continuiteit van D_n volgt hieruit dat D_n op eindig veel punten van teken wisselt op $[-\pi, \pi]$, dus ψ_n is stuksgewijs constant op $[-\pi, \pi]$, dus ook Riemann integreerbaar. En omdat $D_n \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, is ψ_n ook 2π-periodiek.

Verder is

$$\begin{aligned} |S_n(\psi_n, 0)| = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\psi_n(t)\,dt| = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{sgn}(D_n(t))\,dt| \\ = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt| = \|D_n\|_1. \end{aligned} \tag{24}$$

En omdat $\|D_n\|_1 > 0$, hebben we ook dat $\|D_n\|_1 > \frac{1}{2}\|D_n\|_1$. Hiermee hebben we 2π-periodieke en Riemann integreerbare functies ψ_n geconstrueerd die aan beide voorwaarden van Lemma 2 voldoen.

Nu we alle hulpfuncties geconstrueerd hebben, kunnen we de functie f van vergelijking (1) schrijven in termen van de Féjer-kern en de Dirichlet-kern

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(F_{\lambda_n^2} * (\mathrm{sgn} \circ D_{\lambda_n}))(\lambda_n t) \quad \text{met } \lambda_n := n! \cdot 2^{3^n} \tag{25}$$

en als we gebruik maken van het resultaat $F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$ uit Lemma 5, dan kunnen we dit verder versimpelen tot

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(\frac{1}{\lambda_n^2+1}\sum_{k=0}^{\lambda_n^2} D_k * (\mathrm{sgn} \circ D_{\lambda_n}))(\lambda_n t) \quad \text{met } \lambda_n := n! \cdot 2^{3^n}. \tag{26}$$

4 Appendix: Definities en lemma's

We introduceren de notatie gebruikt in dit document voor enkele bekend veronderstelde begrippen:

- De supremumnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathrm{Dom}(f)} |f(x)|$.
- De integraalnorm $\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$.
- De k-de Fourier-coefficient $\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$.
- De n-de partiële Fourier-som $S_n(f,t) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-ikt}$.
- Het begrip *Goniometrische reeks*: is een reeks geschreven in de vorm $x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ met $c_k \in \mathbb{C}$.
- Het begrip *Fourier-polynoom*: met een Fourier-polynoom bedoelen we een functie die geschreven wordt als een eindige som van exponentiële termen $t \mapsto \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{-ikt}$ waarbij we N de *orde* van het Fourier-polynoom noemen. Een Fourier-polynoom is dus een eindige goniometrische reeks.

Voor S_n benadrukken we in het volgende lemma de lineariteitseigenschap die gebruikt zal worden in het splitsen van een reeks.

Lemma 3. *Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is $S_n : R(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$ een lineaire afbeelding. Waarbij $R(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de vectorruimte van 2π-periodieke en op $[-\pi, \pi]$ Riemann-integreerbare functies is.*

Bewijs. Dit volgt uit de eigenschap dat S_n een lineaire combinatie is van de integraal, ook een lineaire afbeelding $R(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Beschouw f, g twee Riemann integreerbare functies op

$[-\pi, \pi]$ en laat $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Dan voor $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} S_n(\lambda f + \mu g, t) &= \sum_{j=-n}^{n} (\widehat{\lambda f + \mu g})(j) e^{-ijt} = \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lambda f(y) + \mu g(y)\, dy \cdot e^{-ijt} \\ &= \sum_{j=-n}^{n} \lambda \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, dy \cdot e^{-ijt} + \sum_{j=-n}^{n} \mu \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y)\, dy \cdot e^{-ijt} \\ &= \lambda \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j) e^{-ijt} + \mu \sum_{j=-n}^{n} \widehat{g}(j) e^{-ijt} = \lambda S_n(f, t) + \mu S_n(g, t) \end{aligned} \tag{27}$$

□

4.1 Kernen

We definieren nu twee kernen:

- De Dirichlet-kern $D_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$.
- De Féjer-kern $F_n(x) := \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijx}$.

We gebruiken de Dirichlet-kern omdat de integraalnorm van de D_n minstens logaritmisch stijgt met n. En we gebruiken de Féjer-kern omdat deze kern niet-negatief is met integraalnorm 1, waardoor voor een bepaalde functie f, de supremumnorm van de convolutie $F_n * f$ niet groter is dan de supremumnorm van f.

Deze twee eigenschappen die we gebruiken in onze hoofdstelling kunnen we afleiden uit de volgende twee lemma's.

Lemma 4. *Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\|D_n\|_1 > \frac{1}{5} \log n$.*

Bewijs. We beschouwen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |D_n(t)|\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} |\frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}|\, dt. \tag{28}$$

We voeren de substitutie $s = \frac{t}{2}$ uit om te krijgen

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} 2|\frac{\sin((2n+1)s)}{\sin(s)}|\, ds \geq \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} 2|\frac{\sin((2n+1)s)}{s}|\, ds \tag{29}$$

waarbij we gebruiken dat $|\sin(s)| \leq |s|$ voor $s \in [0, \pi]$ dus $\frac{1}{|\sin(s)|} \geq \frac{1}{|s|}$. We substitueren $u = (2n+1)s$ om te krijgen

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{(2n+1)\pi} 2|\frac{\sin(u)}{u}|\, du = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} 2|\frac{\sin(u)}{u}|\, ds \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} 2|\frac{\sin(u)}{(k+1)\pi}|\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{2}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\, ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{2}{(k+1)\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(u)\, ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{4}{(k+1)\pi} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} \geq \frac{2}{\pi^2} \int_{1}^{2n+2} \frac{1}{x}\, dx = \frac{2}{\pi^2} \log(2n+2) > \frac{1}{5} \log(2n+2) > \frac{1}{5} \log n. \end{aligned} \tag{30}$$

□

Lemma 5. *Voor alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $F_n(x) \geq 0$.*

Bewijs. We bewijzen eerst met inductie dat voor $n \in \mathbb{N}$, voor $t \in [-\pi, \pi]$

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=-j}^{j} e^{ikt} = \sum_{j=-n}^{n} (n+1-|j|)e^{ijt}. \tag{31}$$

Voor $n = 0$ is dit duidelijk. Stel het is bewezen voor $n = m$, dan

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m+1} \sum_{k=-j}^{j} e^{ikt} &= \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=-j}^{j} e^{ikt} + \sum_{k=-(m+1)}^{m+1} e^{ikt} = \sum_{j=-m}^{m} (m+1-|j|)e^{ijt} + \sum_{k=-(m+1)}^{m+1} e^{ikt} \\ &= \sum_{j=-m}^{m} (m+1-|j|)e^{ijt} + \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt} + (m+2-|m+1|)e^{i(m+1)t} + (m+2-|-(m+1)|)e^{-i(m+1)t} \\ &= \sum_{j=-m}^{m} (m+2-|j|)e^{ijt} + (m+2-|m+1|)e^{i(m+1)t} + (m+2-|-(m+1)|)e^{-i(m+1)t} \\ &= \sum_{j=-(m+1)}^{m+1} (m+2-|j|)e^{ijt}\end{aligned} \tag{32}$$

en dit is precies de uitdrukking voor $n = m+1$. Dus we kunnen schrijven voor $x \neq 0$

$$\begin{aligned}F_n(x) &:= \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijx} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=-n}^{n} (n+1-|j|)\, e^{ijx} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=-j}^{j} e^{ijx} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin((j+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}.\end{aligned} \tag{33}$$

We hebben de volgende identiteit voor $a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) - \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = 2\sin(a)\sin(b) \tag{34}$$

dus dit geeft

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{(n+1)(\sin(\frac{x}{2}))^2} \sum_{j=0}^{n} \sin((j+\frac{1}{2})x)\sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{(n+1)(\sin(\frac{x}{2}))^2} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} \cos(jx) - \cos((j+1)x) \\ &= \frac{1}{(n+1)(\sin(\frac{x}{2}))^2} \frac{1}{2} (\cos(0) - \cos((n+1)x)) = \frac{1}{(n+1)(\sin(\frac{x}{2}))^2} \sin(\frac{n+1}{2}x)\sin(\frac{n+1}{2}x) \\ &= \frac{(\sin(\frac{n+1}{2}x))^2}{(n+1)(\sin(\frac{x}{2}))^2}\end{aligned} \tag{35}$$

en dit is een kwadraat keer een positief getal dus niet-negatief. Voor $x = 0$ krijgen we $F_n(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} 2j+1$ wat ook niet-negatief is. ☐