Hertentamen Hamiltoniaanse dynamische systemen 17 maart 2008

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel in het vervolg gebruiken.
- Cursusmateriaal, boeken en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

Opgave A. Voorzie $\mathbb{R}^4$ met de kanonieke Poissonstructuur $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ en $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$. Beschouw hierop de Hamiltonfunctie

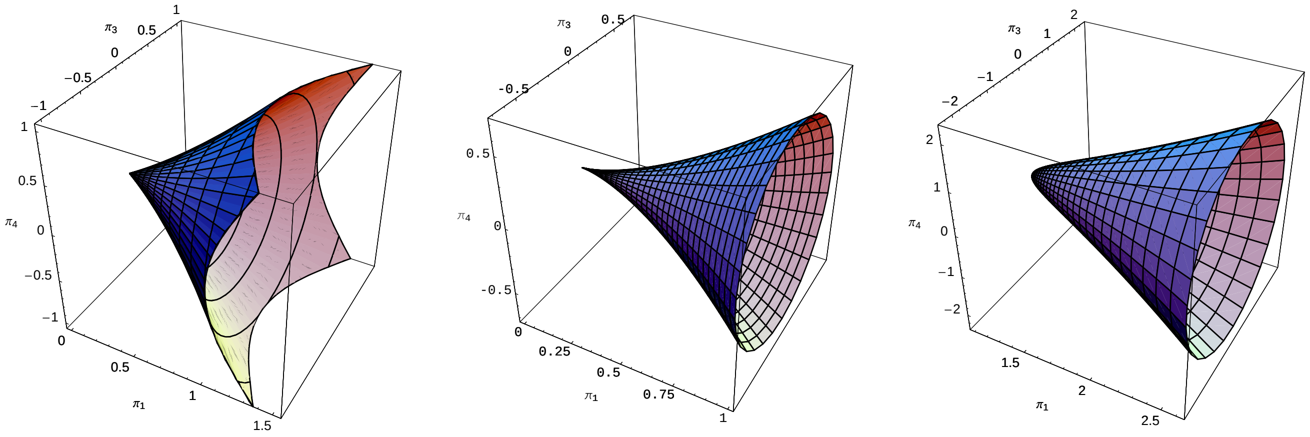
$$H(q,p) \;=\; \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \;+\; \frac{q_1^2}{2} \;-\; q_2 \;+\; 2q_2^4 \;.$$

1. Schrijf de bewegingsvergelijkingen op en merk op dat de vergelijkingen in het (q_1, p_1)–vlak en het (q_2, p_2)–vlak niet van elkaar afhangen. Bereken de stroming van het deelsysteem in het (q_1, p_1)–vlak.
2. Geef het faseportret van het deelsysteem in het (q_2, p_2)–vlak, bereken het evenwichtspunt van dit deelsysteem en diens linearisatie. Is het evenwichtspunt dynamisch stabiel?
3. Reconstrueer de dynamica in twee vrijheidsgraden door superpositie van de afzonderlijke deelsystemen. Geef hiervoor aan tot welke soort trajectoriën de verschillende oplossingen van de deelsystemen leiden.
4. Laat zien dat $L(q,p) = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2)$ een behouden grootheid is en bepaal de singuliere waarden van de energie-impuls-afbeelding
$$\mathcal{EM} \;=\; (L, H) \;:\; \mathbb{R}^4 \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^2 \;.$$
5. Geef aan de hand van een schets van de verschillende waarden van $\mathcal{EM}$ in het (ℓ, h)–vlak een verband tussen deze waarden en de verschillende soorten trajectoriën.
6. Welke bevindingen over de dynamica van H gelden ook voor de door de Hamiltonfunctie
$$K(q,p) \;=\; H(q,p) \;+\; \varepsilon q_1^2 q_2^3$$
met $0 < \varepsilon \ll 1$ gedefinieerde dynamica? Maak waar nodig extra aannames / vermeld de voorwaarden die je nodig hebt (het is niet gevraagd om deze ook te controleren).

Opgave B. Voorzie $\mathbb{R}^4$ met de kanonieke Poissonstructuur $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ en $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$. Beschouw hierop de kwadratische Hamiltonfunctie

$$H_0^0(q,p) \;=\; p_1^2 + q_1^2 \;-\; \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \;.$$

1. Los de bewegingsvergelijkingen voor willekeurige beginwaarde $(q(0), p(0)) = (q^0, p^0)$ op, verifieer dat $(q(2\pi), p(2\pi)) = (q^0, p^0)$ en ga na dat
$$\begin{array}{rccc} \psi \;: & S^1 \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (\rho, (q^0, p^0)) & \mapsto & (q(\rho), p(\rho)) \end{array}$$
een S^1–actie op $\mathbb{R}^4$ definieert.



In complexe coördinaten $u = q_1 + \mathrm{i}p_1$ en $v = q_2 + \mathrm{i}p_2$ is $\psi_\rho(u, v) = (\mathrm{e}^{-2\rho}u, \mathrm{e}^{\rho}v)$.

2. Ga na dat elk ψ–invariant monoom $u^k \bar{u}^l v^m \bar{v}^n$ een product van de monomen $u\bar{u}$, $v\bar{v}$, uv^2 en $\bar{u}\bar{v}^2$ is en concludeer dat elke gladde ψ–invariante functie kan worden geschreven als functie van

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \;+\; p_2^2 + q_2^2 \\
y &= q_1 \, \frac{q_2^2 - p_2^2}{2} \;-\; q_2 p_1 p_2 \\
z &= p_1 \, \frac{q_2^2 - p_2^2}{2} \;+\; q_1 q_2 p_2
\end{aligned}
$$

en de functie H_0^0.

Op de gereduceerde faseruimte is H_0^0 een Casimirfunctie met vaste waarde η en wordt de Poissonstructuur in de variabelen x, y, z door

$$\{f, g\} \;=\; \langle \nabla f \times \nabla g \mid \nabla S_\eta \rangle$$

gegeven, waarbij $S_\eta(x, y, z) = \frac{1}{25}(x + 2\eta)(\eta - 2x)^2 - \frac{5}{2}(y^2 + z^2)$.

3. Ga na dat de verzameling $\{S_\eta = 0\}$ onder elke Hamiltoniaanse dynamica met deze Poissonstructuur invariant is en dat de (gereduceerde) faseruimte

$$\mathcal{P}_\eta \;:=\; \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; S_\eta(x, y, z) = 0\,,\; x \geq \max(\tfrac{1}{2}\eta, -2\eta) \right\}$$

een omwentelings-oppervlak is. In welke gevallen heeft $\mathcal{P}_\eta$ een singulier punt, en waar? (Ter verduidelijking is dit oppervlak in bovenstaand figuur voor $\eta > 0$, $\eta = 0$ en $\eta < 0$ geschetst, maar het is uiteraard niet gevraagd om alleen maar singuliere punten in dit plaatje aan te wijzen.)

4. Formuleer de (gereduceerde) bewegingsvergelijkingen voor de Hamiltonfunctie

$$\mathcal{H}(x, y, z) \;=\; \eta \;+\; x \;+\; y$$

op $\mathcal{P}_\eta$.

Bonusopgave: Bepaal voor $\eta = 0$ de evenwichtspunten.

5. Schets voor $\eta = 0$ het faseportret. *Hint:* teken eerst in het (x, y)–vlak de doorsnede met $\mathcal{P}_0$ en daarin de doorsneden met $\{\mathcal{H} = h\}$ voor enkele waarden h.

6. Reconstrueer voor $\eta = 0$ de door $\mathcal{H}$ gedefinieerde dynamica in twee vrijheidsgraden. Geef hiervoor aan tot welke soort trajectoriën de verschillende oplossingen van het gereduceerde systeem leiden.