Tentamen Hamiltoniaanse dynamische systemen 28 januari 2008

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel in het vervolg gebruiken.
- Cursusmateriaal, boeken en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

Voorzie $\mathbb{R}^4$ met de kanonieke Poissonstructuur $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ en $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$. Beschouw hierop de kwadratische Hamiltonfunctie

$$H_0^0(q,p) \quad = \quad p_1^2 + q_1^2 \; + \; \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \quad .$$

1. Schrijf de bewegingsvergelijkingen op en bereken de bijbehorende stroming

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (t,(q,p)) & \mapsto & \varphi_t(q,p) \end{array} \quad .$$

2. Bepaal de minimale periode $T > 0$ met $\varphi_T = \mathrm{id}$ en ga na dat

$$\begin{array}{rccc} \psi : & S^1 \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (\rho,(q,p)) & \mapsto & \varphi_\rho(q,p) \end{array}$$

   een S^1–actie op $\mathbb{R}^4$ definieert.

3. Bewijs dat elke gladde ψ–invariante functie kan worden geschreven als functie van

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} \\ \tau_2 &= \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \\ \tau_3 &= q_1 \frac{q_2^2 - p_2^2}{2} \; + \; q_2 p_1 p_2 \\ \tau_4 &= p_1 \frac{q_2^2 - p_2^2}{2} \; - \; q_1 q_2 p_2 \quad . \end{aligned}$$

   Hint: gebruik complexe coördinaten $u = q_1 + \mathrm{i}p_1$ en $v = q_2 + \mathrm{i}p_2$.

De structuurmatrix $\quad (\{\tau_i, \tau_j\})_{i,j=1,\ldots,4} \quad = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\tau_4 & \tau_3 \\ 0 & 0 & 2\tau_4 & -2\tau_3 \\ \tau_4 & -2\tau_4 & 0 & \tau_2^2 - 4\tau_1\tau_2 \\ -\tau_3 & 2\tau_3 & -\tau_2^2 + 4\tau_1\tau_2 & 0 \end{pmatrix}$ heeft rang 2.

4. Verifieer dat $H_0^0 = H_0^0(\tau)$ en $S(\tau) = 5\tau_1\tau_2^2 - \frac{5}{2}(\tau_3^2 + \tau_4^2)$ Casimirfuncties zijn.
5. Gebruik de waarde η van de Casimir H_0^0 om d.m.v.

$$x \ := \ \tau_3 \ , \quad y \ := \ \tau_4 \ , \quad z \ := \ \tau_1 - 2\tau_2$$

   een variabele te elimineren. Herschrijf de relaties

$$\tau_1 \ \geq \ 0 \ , \quad \tau_2 \ \geq \ 0 \ , \quad S(\tau) \ = \ 0$$

   in deze variabelen.
6. Ga na dat de (gereduceerde) faseruimte

$$\mathcal{P}_\eta \ := \ \left\{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \frac{1}{25}(z+2\eta)(\eta-2z)^2 = \frac{5}{2}(x^2+y^2)\,,\ -2\eta \leq z \leq \tfrac{1}{2}\eta \ \right\}$$

   een omwentelings-oppervlak is en schets dit oppervlak. Waar heeft $\mathcal{P}_\eta$ een singulier punt?

De Poissonstructuur op $\mathcal{P}_\eta$ wordt in de variabelen x, y, z door

$$\{f, g\} \ = \ \langle \nabla f \times \nabla g \mid \nabla S_\eta \rangle$$

gegeven, met $S_\eta(x,y,z) = \frac{1}{25}(z+2\eta)(\eta-2z)^2 - \frac{5}{2}(x^2+y^2)$.

7. Bereken de getrunceerde derde orde normaalvorm van $H = H_0^0 + H_1^0$ met

$$H_1^0(q,p) \ = \ 2q_1q_2^2$$

   en herschrijf deze als functie in x, y en z.
8. Formuleer de (gereduceerde) bewegingsvergelijkingen voor de Hamiltonfunctie

$$\mathcal{H}(x,y,z) \ = \ \eta \ + \ x \ .$$

9. Schets voor $\eta > 0$ het faseportret van deze vergelijkingen en bepaal de evenwichtspunten.
10. Reconstrueer de door $\mathcal{H}$ gedefineerde dynamica in twee vrijheidsgraden. Geef hiervoor aan tot welke soort trajectoriën de verschillende oplossingen van het gereduceerde systeem leiden.
11. Bepaal de singuliere waarden van de energie-impuls-afbeelding

$$\mathcal{EM} \ = \ (H_0^0, \mathcal{H}) \ : \ \mathbb{R}^4 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^2 \ .$$

12. Geef aan de hand van een schets van de verschillende waarden van $\mathcal{EM}$ in het (η, h)–vlak een verband tussen deze waarden en de verschillende soorten trajectoriën.
13. Veronderstel dat $\mathcal{H}$ de getrunceerde derde orde normaalvorm van H is en dat het verschil $H - \mathcal{H}$ 'voldoende klein' is. Welke bevindingen over de dynamica van $\mathcal{H}$ gelden ook voor de dynamica van H ? Maak waar nodig extra aannames / vermeld de voorwaarden die je nodig hebt (het is niet gevraagd om deze ook te controleren).

Bonusopgave: kun je een soortgelijke analyse voor een willekeurige (maar nog steeds voldoende kleine) storing van $\mathcal{H}$ doorvoeren? Zijn er wezenlijke verschillen?