Tentamen Hamiltoniaanse dynamische systemen 22 januari 2010

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel in het vervolg gebruiken.
- Cursusmateriaal, boeken en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- *SUCCES!*

Voorzie $\mathbb{R}^4$ van de kanonieke Poissonstructuur $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ en $\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$. Beschouw hierop de kwadratische Hamiltonfunctie

$$H_0^0(q,p) \quad = \quad \frac{p_1^2 + q_1^2 \ + \ p_2^2 + q_2^2}{2}$$

in 1:1 resonantie.

1. Los de bewegingsvergelijkingen voor willekeurige beginwaarde $(q^0, p^0) = (q(0), p(0))$ op, verifieer dat $(q(2\pi), p(2\pi)) = (q^0, p^0)$ en ga na dat

$$\begin{array}{rccc} \psi \ : & S^1 \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (\rho, (q^0, p^0)) & \mapsto & (q(\rho), p(\rho)) \end{array}$$

   een S^1–actie op $\mathbb{R}^4$ definieert.

2. Bewijs dat elke gladde ψ–invariante functie kan worden geschreven als functie van

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= p_1 p_2 \ + \ q_1 q_2 \\ \sigma_2 &= q_1 p_2 \ - \ q_2 p_1 \\ \sigma_3 &= \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} - \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \\ \sigma_4 &= \frac{p_1^2 + q_1^2}{2} + \frac{p_2^2 + q_2^2}{2} \ . \end{aligned}$$

   Hint: gebruik complexe coördinaten $u = q_1 + \mathrm{i}p_1$ en $v = q_2 + \mathrm{i}p_2$.

3. Bereken de structuurmatrix $(\{\sigma_i, \sigma_j\})_{i,j=1,\dots,4}$ en verifieer dat σ_4 en $Q(\sigma) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$ Casimirfuncties zijn. Concludeer dat de Poissonstructuur rang 2 heeft.

4. Kies de vaste waarde ε van H_0^0 en ga na dat de (gereduceerde) faseruimte door
$$\mathcal{P}_\varepsilon \;\; := \;\; \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; Q(\sigma) = \varepsilon^2 \right\}$$
wordt gegeven, met Poissonhaak $\{f, g\} = \langle \nabla f \times \nabla g \mid \nabla Q \rangle$.

5. Bereken de getrunkeerde vierde orde normaalvorm van $H = H_0^0 + H_1^0 + H_2^0$ met $H_1^0 = 0$ en
$$H_2^0(q,p) \;\; = \;\; 8 q_1^2 q_2^2 \;\; .$$

6. Formuleer de (gereduceerde) bewegingsvergelijkingen voor de Hamiltonfunctie
$$\mathcal{H}(\sigma) \;\; = \;\; \varepsilon \; + \; 3\sigma_1^2 \; + \; \sigma_2^2$$
op $\mathcal{P}_\varepsilon$ en bepaal de evenwichtspunten.

7. Schets voor vaste $\varepsilon > 0$ het faseportret van deze vergelijkingen.

8. Reconstrueer de door $\mathcal{H}$ gedefineerde dynamica in twee vrijheidsgraden. Geef hiervoor aan tot welke soort trajecten de verschillende oplossingen van het gereduceerde systeem leiden.

9. Bepaal de singuliere waarden van de energie-impuls-afbeelding
$$\mathcal{EM} \;\; = \;\; (H_0^0, \mathcal{H}) \;\; : \;\; \mathbb{R}^4 \;\; \longrightarrow \;\; \mathbb{R}^2 \;\; .$$
Geef aan de hand van een schets van de verschillende waarden van $\mathcal{EM}$ in het (ε, h)–vlak een verband tussen deze waarden en de verschillende soorten trajecten.

10. Veronderstel dat $\mathcal{H}$ de getrunkeerde vierde orde normaalvorm van H is en dat $\varepsilon > 0$ voldoende klein is. Welke bevindingen over de dynamica van $\mathcal{H}$ gelden ook voor de dynamica van H ? Maak waar nodig extra aannames / vermeld de voorwaarden die je nodig hebt (het is niet gevraagd om deze ook te controleren).

Bonusopgave: kun je een soortgelijke analyse voor een willekeurige (maar nog steeds voldoende kleine) storing van $\mathcal{H}$ doorvoeren? Zijn er wezenlijke verschillen?