Tentamen Hamiltoniaanse dynamische systemen 2 juli 2014

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam.
- Schrijf met een (naar voorkeur blauwe) pen, niet met potlood.
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Als je een onderdeel niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel in het vervolg gebruiken.
- Cursusmateriaal, boeken en aantekeningen mogen gebruikt worden, rekenmachines mogen niet gebruikt worden. Breuken, faculteiten etc. hoeven niet te worden uitgewerkt.
- Alle opgaven tellen even zwaar
- *SUCCES!*

Beschouw op $\mathbb{R}^2$ danwel $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ de centraalkrachtvelden met potentialen

$$U(x_1^2 + x_2^2) \quad = \quad \ln(R + x_1^2 + x_2^2)$$

waarbij $R > 0$ danwel $R = 0$. Samen met de kinetische energie $\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$ leidt dit tot de Hamiltonfunctie

$$H(x, y) \quad = \quad \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} \; + \; \ln(R + x_1^2 + x_2^2)$$

en we werken met de kanonieke Poissonstructuur $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$ en $\{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0$.

1. Schrijf de bewegingsvergelijkingen $\dot{z} = X_H(z)$ in de (x, y)–coördinaten expliciet op.
2. Bepaal de symmetrieën van dit systeem; laat in het bijzonder zien dat er een S^1–symmetrie van rotaties is.
3. Bepaal de invarianten van de S^1–symmetrie om van 2 naar 1 vrijheidsgraad te reduceren; geef ook de gereduceerde Hamiltonfunctie $\mathcal{H}$.
4. Ga na dat de gereduceerde Poissonstructuur door

   $$\{f, g\} \quad = \quad \langle \nabla f \times \nabla g \mid \nabla S_\mu \rangle$$

   wordt gegeven, waarbij μ de waarde van de invariant τ_4 is (die de S^1–symmetrie voortbrengt) en

   $$S_\mu(\tau) \quad = \quad \frac{\tau_3^2}{2} \; - \; 2\tau_1\tau_2 \; + \; \frac{\mu^2}{2} \; ;$$

   schrijf ook de gereduceerde faseruimte $\mathcal{P}_\mu$ in termen van S_μ.

5. Bepaal de evenwichtspunten van het gereduceerde systeem. Doe dit en voor $R > 0$ en voor $R = 0$.

6. Geef aan wat de andere banen zijn. Maak waar nodig onderscheid tussen $\mu \neq 0$ en $\mu = 0$ en tussen $R > 0$ en $R = 0$.

7. Schets de gereduceerde faseportretten voor de verschillende gevallen en geef aan welke evenwichten stabiel zijn in de zin van Liapunov.

Voor de reconstructie van de door $\mathcal{H}$ gedefinieerde dynamica in twee vrijheidsgraden nemen we aan dat de oplossing in één vrijheidsgraad door $\tau(t)$ wordt gegeven.

8. Voer poolcoördinaten $r > 0$, $\rho \in S^1$ in door middel van
$$x_1 \;=\; r\cos\rho \;\;, \quad x_2 \;=\; r\sin\rho \tag{1}$$
en bereken de oplossing $(r(t), \rho(t))$ in termen van $\tau(t)$ en integralen van functies ervan. *Hint:* bereken eerst een vergelijking voor de tijdsafgeleide $\dot{\rho}$.

9. Voor beginvoorwaarden met $\mu \neq 0$ bewijs dat $\{\rho(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = S^1$ en $\{r(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = [r_{\min}, r_{\max}]$ met van de beginvoorwaarde afhankelijke $r_{\min} \leq r_{\max}$.

10. Beschouw, nog steeds voor beginvoorwaarden met $\mu \neq 0$, de door (1) verkregen oplossing $x(t)$ en $y(t) = \dot{x}(t)$. Bewijs dat voor elke (vaste) $t \in \mathbb{R}$ de raaklijn $\ell(t) = \{x(t) + \lambda y(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ lokaal niet wordt overschreden: er bestaat $\varepsilon > 0$ zodanig, dat $x(s)$ voor alle $s \in \,]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\,$ aan dezelfde kant van $\ell(t)$ ligt.

11. Neem een 'typische' beginvoorwaarde en gebruik de verkregen informatie voor een schets van de oplossingskromme $x(t)$.

12. Bereken voor $R = 0$ de singuliere waarden van de energie-impuls-afbeelding
$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{EM} & : & \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y) & \mapsto & (\tau_4(x, y), H(x, y)) \end{array}$$
en maak hiervan een schets. Wat verandert als $R \neq 0$?

13. Geef een verband tussen de waarden van $\mathcal{EM}$ in het (μ, h)–vlak en de verschillende soorten verzamelingen $\mathcal{EM}^{-1}(\mu, h)$. Welke trajectoriën horen bij deze $\mathcal{EM}^{-1}(\mu, h)$?

14. Beschouw een trajectorië $(x(t), y(t))$ en twee tijden $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ met $\|x(t_1)\| = \|x(t_2)\| = r_{\max}$. Bewijs dat de trajectorië periodiek is als $\langle x(t_1) \mid x(t_2)\rangle = r_{\max}^2 \cos 2\pi\vartheta$ met $\vartheta \in \mathbb{Q}$. Onder welke extra voorwaarde is deze toereikende conditie ook noodzakelijk?

15. Wat kun je over de dynamica in het potentiaal
$$U_\varepsilon(x_1, x_2) \;\;=\;\; \ln(R \,+\, x_1^2 \,+\, (1 + \varepsilon)x_2^2)$$
zeggen als $\varepsilon > 0$ voldoende klein is ? Maak waar toepasselijk extra aannames over de dynamica voor $\varepsilon = 0$, dat wil zeggen vermeld de voorwaarden die je nodig hebt (het is niet gevraagd om deze ook te controleren).