RHEIN.-WESTF.TECHN.HOCHSCHULE AACHEN
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Heinz Hanßmann

Aachen, den 13.4.2007

1. Übungsblatt zur Vorlesung Hamiltonsche Dynamische Systeme

1. Welche Typen linearer Hamiltonscher Systeme mit einem Freiheitsgrad gibt es? Wie müssen die zugehörigen Hamiltonfunktionen aussehen? Zusatzaufgabe: Welche der auftretenden Gleichgewichtspunkte sind strukturell stabil - und in welchem Sinne?

2. Sei

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \omega\, p \\ \dot{p} &= -\omega\, q, \qquad \omega > 0, \end{aligned}$$

ein harmonischer Oszillator. Transformieren Sie das System nach "Winkelwirkungsvariablen" φ, I gemäß $q = \sqrt{2I}\ \cos\varphi, \quad p = \sqrt{2I}\ \sin\varphi$ und schließen Sie, daß die Flüsse zu verschiedenen ω zueinander äquivalent sind, d.h. sie unterscheiden sich nur in der Zeitparametrisierung.

3. Sei $H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ mit einer beliebigen potentiellen Energie $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Legendre-Transformierte

$$L(x,v) := \sup_{p \in \mathbb{R}} \left(v \cdot p - H(x,p) \right)$$

und verdeutlichen Sie die Situation durch eine Skizze. Die so erhaltene Funktion L heißt in der Mechanik auch Lagrangefunktion. Zeigen Sie, daß die Bewegungsgleichungen in

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

übergehen.